

Electricidad y magnetismo: una guía introductoria

Alejandro FERRERO Botero,
Jeffersson Andrés Agudelo Rueda,
Álvaro Damián Gómez Granja



UNIVERSIDAD CATÓLICA
de Colombia

Vigilada Mineducación



La colección CIENCIAS BÁSICAS presenta obras que proponen soluciones prácticas a la educación en ciencias, con el objetivo de llegar a una apropiación contextualizada del conocimiento de las ciencias básicas. Así es como se busca, no solo aproximar a los estudiantes a este conocimiento fundante, sino que, como valor agregado, ejemplificar las ciencias básicas en contextos de formación profesional, estableciendo marcos de referencia, propios de cada disciplina. De esta forma, se pretende contribuir a optimizar los procesos de enseñanza, comprensión y aprendizaje para estudiantes y profesores.



ALEJANDRO FERRERO BÓTERO

Docente de tiempo completo de la Universidad Católica de Colombia y actual Coordinador de Investigaciones del Departamento de Ciencias Básicas. Físico y magíster en Física de la Universidad de los Andes. Doctor en Física de la Universidad de Carolina del Sur (USA). Cuenta con un posdoctorado de la Universidad de los Andes y una importante trayectoria investigativa.

JEFFERSSON ANDRÉS AGUDELO RUEDA

Físico de la Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Ciencias - Física de la Universidad de los Andes. Actualmente cursa un doctorado en el Mullard Space Science Laboratory, adscrito a University College London.

ÁLVARO DAMIÁN GÓMEZ GRANJA

Docente de Física de tiempo completo de la Universidad Católica de Colombia, Departamento de Ciencias Básicas. Ingeniero electrónico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Cuenta con estudios de Ingeniería de Comunicación de Satélites en el Instituto de Telecomunicaciones de Tokio, Japón.

ALEJANDRO FERRERO BOTERO, JEFFERSSON ANDRÉS AGUDELO RUEDA,
ÁLVARO DAMIÁN GÓMEZ GRANJA

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO: UNA GUÍA INTRODUCTORIA



UNIVERSIDAD CATÓLICA
de Colombia
Vigilada Mineducación

BOGOTÁ, D. C.

Ferrero Botero, Alejandro

Electricidad y magnetismo: una guía introductoria / Alejandro Ferrero Botero,
Jeffersson Andrés Agudelo Rueda, Álvaro Damián Gómez Granja. -Bogotá :
Universidad Católica de Colombia, 2020

150 páginas; 20 x 24 cm

ISBN: 978-958-5133-03-7 (impreso)

ISBN: 978-958-5133-04-4 (digital)

I. Título II. Agudelo Rueda, Jefferson Andrés III. Gómez Granja, Álvaro
Damián

1.Electricidad 2. Magnetismo 3. Electromagnetismo

Dewey 537 SCDD ed. 21

© Universidad Católica de Colombia

© Alejandro Ferrero Botero

© Jeffersson Andrés Agudelo Rueda

© Álvaro Damián Gómez Granja

Primera edición, Bogotá, D.C.
Junio de 2020

Dirección Editorial
Stella Valbuena García

Coordinación Editorial
María Paula Godoy Casasbuenas

Corrección de estilo
John Fredy Guzmán Vargas

Diseño de colección
Juanita Isaza

Diagramación L^AT_EX
Daniel Contreras Niño

Publicación digital
Hipertexto Ltda.
www.hipertexto.com.co
Bogotá, D. C., Colombia

Impresión
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.S.
www.xpress.com.co
Bogotá, D.C., Colombia

Departamento de Ciencias Básicas

Diagonal 46A # 15B-10, sede Claustro, bloque U
Teléfono: (517) 327 7300 ext. 3000, 3002, 3003 y 3007
Bogotá, D. C.
cienciasbasicas@ucatolica.edu.co

Editorial

Universidad Católica de Colombia
Av. Caracas # 46-72, piso 5
Bogotá, D. C.
editorial@ucatolica.edu.co
www.ucatolica.edu.co

Todos los derechos reservados. Esta publicación
no puede ser reproducida ni total ni parcialmente
o transmitida por un sistema de recuperación de
información, en ninguna forma ni por ningún medio,
sin el permiso previo del editor.

Hecho el depósito legal
© Derechos reservados

CONTENIDO

1. Electrostática	11
1.1. Campo eléctrico	11
1.1.1. Origen del campo eléctrico, carga eléctrica	11
1.1.2. Conductores y aislantes	14
1.2. Fuerza de Coulomb	15
1.2.1. Fuerza entre un par de cargas puntuales	15
1.2.2. Sistemas discretos de carga	17
1.2.3. Ejemplos y técnicas de solución	18
1.3. El campo eléctrico	24
1.3.1. Distribuciones discretas de carga	28
1.3.2. Ejemplos y técnicas de solución	28
1.3.3. Distribuciones continuas de carga	33
1.3.4. Ejemplos y técnicas de solución	35
1.4. Movimiento de partículas en campos eléctricos constantes	41
1.4.1. Las ecuaciones de movimiento	41
1.4.2. Ejemplos y técnicas de solución	42
1.5. Dipolos eléctricos	46
1.6. Ejercicios	48
2. Ley de Gauss	51
2.1. El flujo eléctrico y la ley de Gauss	51
2.1.1. Flujo eléctrico	51
2.1.2. Ley de Gauss	53
2.2. Distribución de carga en conductores y aislantes	57
2.3. Ley de Gauss para calcular campos eléctricos	59
2.3.1. Ejemplos	60
2.4. Ejercicios	68

3. Potencial eléctrico y energía	73
3.1. Trabajo y energía potencial eléctrica	73
3.1.1. Energía potencial de una distribución discreta de cargas . . .	76
3.2. Conservación de la energía	78
3.3. Estrategias para ejercicios que involucren energía	78
3.3.1. Cálculo de energía potencial	79
3.3.2. Conservación de energía	80
3.4. Potencial eléctrico	82
3.4.1. Potencial eléctrico de una distribución discreta de cargas . .	83
3.4.2. Potencial eléctrico de una distribución continua de cargas . .	85
3.4.3. Ejemplos y técnicas de solución	86
3.5. La diferencia de potencial	89
3.5.1. Diferencia de potencial	89
3.5.2. Relación entre campo y potencial eléctrico	90
3.6. Ejercicios	91
4. Capacitores	93
4.1. Capacitancia	93
4.1.1. ¿Cómo llega la carga al condensador?	94
4.1.2. Cálculo de la capacitancia	95
4.2. Condensadores en serie y en paralelo	97
4.2.1. Condensadores en serie	97
4.2.2. Condensadores en paralelo	98
4.3. Energía almacenada en un condensador	99
4.4. Dieléctricos	100
4.5. Ejemplos y técnicas de solución	102
4.6. Ejercicios	104
5. La Corriente eléctrica y las leyes de Kirchhoff	109
5.1. Corriente eléctrica	109
5.1.1. Densidad de corriente	110
5.2. Resistencia y ley de Ohm	111
5.2.1. Resistencia	111
5.2.2. Ley de Ohm	112
5.3. Combinaciones de resistencias en serie y en paralelo	114
5.3.1. Resistencias en serie	114
5.3.2. Resistencias en paralelo	115
5.3.3. Estrategia de solución de ejercicios y problemas	115
5.4. Circuitos eléctricos	117
5.4.1. Algunos nombres comúnmente usados en el análisis de circuitos	118

5.5.	Leyes de Kirchhoff	119
5.5.1.	Primera ley o ley de nodos	119
5.5.2.	Segunda ley o ley de mallas	119
5.5.3.	Estrategia de solución de ejercicios y problemas	120
5.6.	Ejercicios	123
6.	Fenómenos magnéticos	129
6.1.	Fuerza magnética sobre cargas en movimiento	129
6.2.	Movimiento de cargas en campos magnéticos constantes	131
6.3.	Fuerza magnética sobre conductores	133
6.4.	Momento de torsión magnético	134
6.4.1.	Estrategia de solución de ejercicios y problemas	136
6.5.	Ejercicios	147

PRESENTACIÓN

¡Triste época la nuestra! Es más fácil desintegrar un átomo que un perjuicio

Albert Einstein

Esta cartilla fue diseñada para introducir a estudiantes de Ingeniería en temas de electricidad y magnetismo durante un semestre académico, de acuerdo con los contenidos de la parcelación vigente de la asignatura de Electricidad y Magnetismo que se imparte actualmente en la Universidad Católica de Colombia. Se realizó tratando de organizar los temas con la mayor claridad posible, teniendo en cuenta las falencias matemáticas que algunos estudiantes presentan por haber olvidado conceptos vistos en otras asignaturas del área de Física. El objetivo principal es proporcionar al estudiante un material de apoyo para reforzar los conceptos vistos en clase con una presentación clara de los principios y conceptos. Se ha hecho énfasis en el uso de razonamientos físicos y estrategias para la solución de problemas. Para la fácil comprensión de los temas se ha utilizado un estilo claro y lógico que sea interesante para los estudiantes, aunque de una manera informal. Se han incluido métodos para la solución de ejercicios que faciliten los procesos que deben seguir los estudiantes, eliminando dudas que puedan tener en algunos casos. En cuanto al nivel matemático, no es otro que el necesario, el cual fue estudiado previamente en las asignaturas del cálculo. En los ejercicios resueltos se ha hecho un paso a paso que puede servir también para abordar con seguridad los problemas que están al final de los capítulos.

ELECTROSTÁTICA

1.1. Campo eléctrico

1.1.1. Origen del campo eléctrico, carga eléctrica

En el curso de *mecánica y laboratorio* se introducen los conceptos fundamentales de la dinámica a partir de las leyes de Newton del movimiento, sin hacer distinción del tipo de fuerzas estudiadas más allá de su carácter conservativo. Simplemente se mencionó a las *fuerzas de contacto* (fuerza normal y fuerza de fricción, por ejemplo) como aquellas sujetas a la tercera ley de Newton, pero no se habló de su naturaleza íntima, es decir, de su origen.

En la naturaleza existen varias interacciones o fuerzas que rigen el comportamiento de la materia. Hasta el día de hoy la física estudia cuatro fuerzas fundamentales, de las cuales se derivan los fenómenos físicos observados: la nuclear fuerte, la electromagnética, la nuclear débil y la gravitacional.

La fuerza gravitacional es aquella que, entre muchas otras cosas, es responsable de mantenernos unidos a la superficie terrestre; la función de esta interacción es atraer dos cuerpos entre sí. La fuerza nuclear fuerte es responsable de formar los núcleos de los átomos y la débil es responsable de otro tipo de reacciones nucleares, incluyendo algunos decaimientos radiactivos.

La fuerza electromagnética será el objeto de estudio en esta cartilla. Ella está presente en la gran mayoría de fenómenos que observamos: tormentas, la existencia de la luz, la energía que alimenta nuestros electrodomésticos, etc. Por ejemplo, cuando nos golpeamos contra una piedra, la fuerza eléctrica que une los átomos del mineral hace que sintamos el golpe contra esta.

Muchas personas han oído hablar de fuerzas como la normal, la tensión, la fricción, entre otras. Aunque estas sirven para describir muchos fenómenos de la vida diaria,

cuando las estudiamos en detalle nos damos cuenta de que son consecuencia de otras fuerzas más elementales, principalmente de tipo electromagnético. Por ejemplo, la tensión en un cable se origina debido a la interacción eléctrica originada entre las moléculas que componen el material del cable; estas interacciones evitan que el cable se rompa, generando, como respuesta, la fuerza que comúnmente denominamos como tensión.

Hoy en día sabemos que la fuerza eléctrica es consecuencia de una propiedad de la materia: la carga eléctrica. Aunque es muy difícil asegurar quién descubrió primero esta propiedad, sí se sabe que en la antigua Grecia los griegos se dieron cuenta de que cuando frotaban ámbar con lana, este atraía varios tipos de objetos. Hoy en día podemos repetir este tipo de experimentos frotando entre sí barras de plástico, tejidos de nailon, trozos de piel, entre otros. Dependiendo del tipo de objetos, algunos se atraen o se repelen entre sí. Este hecho nos daría a pensar que algo sucede en estos materiales cuando son frotados que genera estos fenómenos de atracción y repulsión. Hoy en día decimos que al frotarse los materiales adquieren carga eléctrica o se cargan; de esta manera, la propiedad responsable de estos fenómenos es la carga eléctrica. Sin embargo, deben existir dos tipos de cargas eléctricas porque de no ser así evidenciaríamos o bien fenómenos de atracción o de repulsión, pero no ambos.

Los experimentos realizados en la época moderna, incluyendo los de J. J. Thomson en el siglo XIX sobre rayos catódicos, los de E. Rutherford a comienzos del siglo XX sobre la naturaleza del núcleo atómico, y muchos más, han confirmado estas hipótesis, lo que permite asegurar que existen dos tipos de cargas eléctricas: la positiva y la negativa. La positiva está presente en los protones y la negativa en los electrones. En el sistema internacional, esta magnitud se mide en culombios, representados por la letra latina C. En el actual modelo atómico los protones, junto con los neutrones (partículas muy parecidas a los protones pero sin carga eléctrica), componen el núcleo atómico. Tanto los protones como los neutrones están compuestos a su vez por partículas mucho más pequeñas llamadas quarks; los cuales, hasta lo que conocemos, son indivisibles. El núcleo atómico es una parte muy pequeña del átomo donde está localizada su carga positiva. Típicamente, las distancias de un núcleo atómico son del orden de femtómetros, 10^{-15} m, una distancia extremadamente pequeña que únicamente puede ser analizada mediante aceleradores de partículas muy potentes.

Los electrones, por otro lado, son más pequeños que los protones y a su vez son indivisibles (no se pueden dividir en componentes más pequeños, como los quarks en el caso de los protones). Los electrones contienen la carga negativa del átomo y podemos modelarlos como bolas muy pequeñas orbitando el núcleo atómico. Las distancias de estas órbitas son del orden de angstroms, 10^{-10} m. También es una distancia muy pequeña pero mucho mayor que aquella que gobierna los núcleos atómicos.

A pesar de que las cargas eléctricas de los protones y electrones son iguales en magnitud (solo difieren en signo), los protones son muchísimo más masivos que los electrones. De hecho, la gran mayoría de la masa en un átomo está en el núcleo; la masa aportada por los electrones es insignificante. En la tabla 1.1 se muestran algunas propiedades importantes.

Tabla 1.1. Propiedades elementales de las tres principales partículas subatómicas

Partícula	Carga eléctrica	Masa
Protón	$q_p = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Neutrón	$q_n = 0$	$m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Electrón	$q_e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Los átomos se pueden visualizar como un sistema solar, donde el sol representa el pequeño núcleo que concentra la gran mayoría de la masa y los planetas representan los electrones que están girando en torno a él. Aunque esto no es correcto al nivel de los átomos, es una forma útil de visualizar lo que sucede. Sorprendentemente, la gran mayoría del espacio que ocupan los átomos es vacío, lo cual parece extraño porque estos parecen sólidos a nuestros sentidos. Es importante mencionar que esta analogía es simplemente una forma de imaginar el átomo, ya que nuestros sentidos son incapaces de entender realmente lo que los átomos son. De hecho, esta asociación carece de sentido cuando el átomo se estudia bajo principios más fundamentales de la física, que incluyen la mecánica cuántica.

A escala humana la materia es eléctricamente neutra, ya que existen prácticamente la misma cantidad de electrones y protones, cuyos efectos se ven atenuados. Recordemos que en una simple gota de agua hay del orden de 10^{23} átomos.

Aunque un átomo ordinario posee la misma cantidad de protones y neutrones (por ejemplo, un átomo de oro posee 79 electrones y 79 protones), bajo algunas circunstancias algunos átomos pueden tener un excedente de carga; a estos átomos se los conoce como iones. Un ión negativo es un átomo que posee uno o varios electrones en exceso y un ión positivo carece de uno o varios electrones, lo que se traduce en un exceso de uno o varios protones. Hay átomos que tienen la tendencia de recibir electrones y otros en cederlos, y esto es la base de la creación de moléculas y así de la materia que percibimos. Como las cargas de signos iguales se repelen y aquellas de signos opuestos se atraen, los iones positivos se sienten atraídos por los negativos.

Como una pequeña aplicación de estos conceptos se calculará el número de electrones que hay en un pequeño alfiler de plata de 20 g, así como la carga que estos electrones poseen. Para esto se sabe que el número atómico de la plata es 47 y, por lo tanto, cada átomo de plata posee 47 electrones (y protones). Otra información

importante es el peso atómico de la plata (107,87), lo que implica que su masa molar es 107,87 g/mol. Con esta última información podemos calcular el número de moles en 20 g de plata: $n = 20 \text{ g} / 107,87 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,186 \text{ mol}$. El número de átomos en el alfiler es entonces este número multiplicado por el número de Avogadro $N_{atom} = 0,186 \text{ mol} \cdot 6,023 \times 10^{23} \text{ átomos/mol} = 11,2 \times 10^{22} \text{ átomos}$. Como hay 47 electrones por átomo, se multiplica este resultado por 47 obteniendo $N_e = 5,26 \times 10^{24}$. La carga generada se encuentra multiplicando esta última expresión por la carga del electrón, así $q = -844 \text{ kC}$. Se debe recordar que la misma carga (pero positiva) estará presente en los protones que forman la plata siempre y cuando el alfiler sea neutro eléctricamente.

Sin más preámbulos, *¡que la fuerza eléctrica nos acompañe!*

1.1.2. Conductores y aislantes

De acuerdo con sus propiedades eléctricas, los materiales se pueden clasificar en conductores y aislantes; existen otro tipo de materiales como superconductores y semiconductores, pero las propiedades de estos dos últimos no se estudiarán en esta cartilla.

Los conductores son materiales que permiten transportar electrones sin mayor esfuerzo, ya que estos no están muy bien atados a los núcleos. Recuerde que las moléculas se originan por los enlaces entre las cargas eléctricas, pero en los conductores los electrones más externos de los átomos no sienten demasiada atracción a los núcleos y por eso se pueden mover de forma relativamente libre a lo largo de la materia. Aquellos materiales que son buenos conductores poseen una buena conductividad eléctrica.

Cabe resaltar que la conductividad eléctrica es una propiedad que depende de la temperatura del ambiente. Los metales son excelentes conductores de la electricidad a temperaturas ordinarias, pero este comportamiento difiere a distintas temperaturas. En la gran mayoría de los casos la conductividad eléctrica aumenta cuando se disminuye la temperatura. Los mejores conductores de la electricidad a temperatura ambiente son los metales, siendo la plata el mejor conductor eléctrico.

Los aislantes no permiten el libre movimiento de las cargas porque los electrones están muy bien aferrados a los núcleos. Para mover los electrones se debe aplicar bastante energía para lograr este propósito. Podríamos decir que un buen aislante es mal conductor, y viceversa. Muchos materiales orgánicos como la madera son buenos aislantes. Por medio de la tecnología se pueden crear otros materiales que son buenos aislantes, como el vidrio, el plástico, la cerámica, entre otros.

Cuando se usa un cable para conectar un televisor, por ejemplo, la parte interna está compuesta por cobre, un muy buen conductor de la carga eléctrica; gracias a esto la energía llega de la pared al televisor. Sin embargo, el cable está rodeado de

caucho, un muy buen aislante que evita que nos pase la corriente al tocarlo. El caucho también es un muy buen protector del cable y evita que la energía se disipe.

1.2. Fuerza de Coulomb

Las propiedades de la carga eléctrica dadas en los párrafos anteriores definen la forma como interactúan los sistemas cargados eléctricamente. A principios del siglo XIX, el físico francés C. A. de Coulomb cuantificó la forma como interactúan los sistemas eléctricos estáticos usando balanzas de torsión. En sus experimentos se dio cuenta de que la fuerza eléctrica depende de dos cosas: de la cantidad de carga en cada objeto y la distancia que los separa.

1.2.1. Fuerza entre un par de cargas puntuales

El sistema eléctrico más sencillo de imaginar es una carga puntual q , la cual por lo pronto no tiene volumen, es un punto cargado. Para esto se pueden considerar dos cargas puntuales, q_1 y q_2 , colocadas en el espacio en posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente. Se debe recordar que dos cargas con el mismo signo se repelen, mientras que cargas con signos opuestos se atraen.

Se podría esperar que entre mayores sean los valores de las cargas, la fuerza sentida será mayor; esto ha sido confirmado en los experimentos. Coulomb también observó que la fuerza estaría orientada sobre la línea recta que une a las dos cargas y que, además, depende del cuadrado del inverso de la distancia que las separa. Esta distancia la escribiremos como $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ (en términos vectoriales $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$). Las ideas anteriores se pueden sintetizar en la siguiente fórmula:

$$\vec{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.1)$$

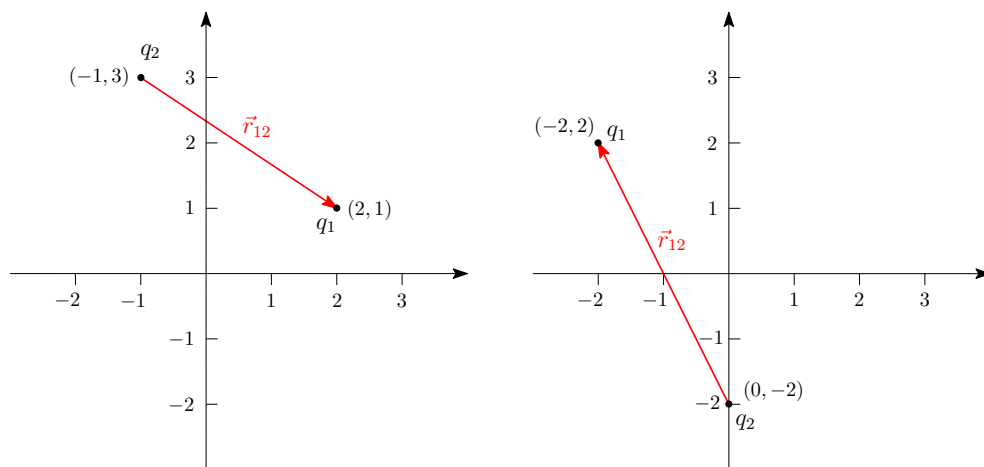
Vale la pena explicar un poco más la ley de Coulomb. El subíndice 12 en la fuerza \vec{F}_{12} indica la fuerza que la carga 1 siente debido a la presencia de la carga 2. Por el contrario, \vec{F}_{21} se refiere a la fuerza que la carga 2 siente debido a la presencia de la carga 1.

El vector unitario $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ describe la línea que une a las cargas q_1 y q_2 . Esta línea se conoce como *línea de acción* de la fuerza.

Suponga que dos cargas positivas están ubicadas a lo largo del eje x , donde la carga 1 está a la izquierda y la 2 a la derecha. El efecto entre ellas será repulsivo y, debido a la ubicación, \hat{r}_{12} se orientará a lo largo de este eje. De esta forma, la carga 1 ejercerá un efecto que empuja la carga 2 hacia la derecha, concluyendo así que $\hat{r}_{21} = \hat{i}$. Por el contrario, la carga 2 le ejercerá un efecto a la carga 1 que la empuja

hacia la izquierda, lo que se traduce en $\hat{r}_{12} = -\hat{i}$. El lector notará que $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$. De hecho, esto es un caso general que nos permite concluir que la fuerza que una carga le ejerce a otra es la misma que la última le ejerce a la primera, pero en sentido contrario. En término de las leyes de Newton, esto se conoce como la ley de acción y reacción, lo cual se escribe matemáticamente de la forma

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (1.2)$$



$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (2, 1) - (-1, 3) = (3, -2)$$

$$r_{12} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{j}$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (-2, 2) - (0, -2) = (-2, 4)$$

$$r_{12} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

Figura 1.1. Diagrama de fuerza entre dos cargas

Otra forma de entender la dirección de las fuerzas se basa en el signo de las cargas. Si q_1 y q_2 poseen el mismo signo, el producto es positivo y la fuerza tiende a separar las cargas. En física, una fuerza positiva es de carácter repulsivo. Por el contrario, si las cargas tienen diferente signo, el producto es negativo y, por lo tanto, la fuerza tiende a atraer dichas cargas. Similarmente, una fuerza negativa se considera una fuerza atractiva.

Como la fuerza \vec{F}_{12} debe tener unidades de Newtons (N), se debe introducir una constante que fije dichas unidades en la expresión de la ley de Coulomb. Dicha constante se escribe como k y tiene este valor aproximado:

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (1.3)$$

Algunas veces la constante ϵ_0 es usada en la Ec. (1.1) en vez de la constante k . Hay una relación muy sencilla entre ellas, ya que $k = 1/4\pi\epsilon_0$, o:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \quad (1.4)$$

1.2.2. Sistemas discretos de carga

Ahora se considerará una situación un poco más compleja, en la cual se tiene un conjunto de más de dos cargas.

En dicha situación se aplica el *principio de superposición de la mecánica*. Es importante recordar que este principio dice que el valor total de cierta cantidad física es el resultado de la suma del efecto de cada componente por aparte. Para aplicar este principio al problema de interés, el enfoque estará en la carga que siente la fuerza eléctrica; esta carga se llamará Q . Una vez identificada esta, se debe calcular la fuerza que cada una de las otras cargas, q_1 , q_2 , etc., hace sobre Q usando la ley de Coulomb (1.1). Finalmente, se deben sumar todas las fuerzas sobre Q para hallar la fuerza neta que esta siente. De forma matemática, suponiendo la existencia de $N + 1$ cargas (una Q y N adicionales que interactúan con la primera), este proceso se puede representar así:

$$\begin{aligned} \vec{F}_Q &= \vec{F}_{Q1} + \vec{F}_{Q2} + \dots + \vec{F}_{QN} \\ &= \frac{k Q q_1}{r_{Q1}^2} \hat{r}_{Q1} + \frac{k Q q_2}{r_{Q2}^2} \hat{r}_{Q2} + \dots + \frac{k Q q_N}{r_{QN}^2} \hat{r}_{QN} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{k Q q_i}{r_{Qi}^2} \hat{r}_{Qi} \end{aligned}$$

Donde se ha calculado la fuerza que cada carga q_i hace sobre Q en la segunda línea. Al final se han sumado las contribuciones de las N posibles cargas puntuales que interactúan con Q , teniendo en cuenta que la carga Q no interactúa consigo misma. La distancia relativa y el vector unitario se expresan en términos del vector posición de Q y el de cada carga q_i para dejar claro el hecho de que la fuerza actúa entre pares.

De forma general, al conjunto de N cargas q_i y sus posiciones \vec{r}_i se le conoce como *distribución discreta de cargas*. A la carga Q sobre la que actúan las demás cargas se le llama *sensor o medidor*. Si la magnitud de la carga sensor es muy pequeña con respecto de las otras, se le llama además *carga de prueba*.

Finalmente, la fuerza de una distribución discreta de cargas $\{q_i, \vec{r}_i\}$ sobre una carga sensor Q se puede escribir, en otra notación, como:

$$\vec{F} = kQ \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (1.5)$$

Donde r_i es la distancia de cada carga q_i a Q y \hat{r}_i es el vector unitario que indica la dirección que las conecta.

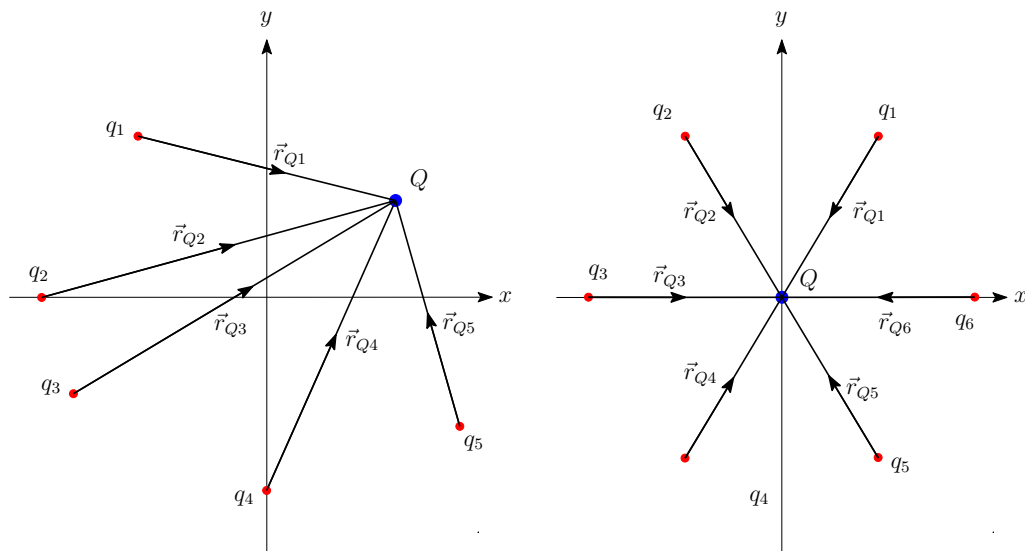


Figura 1.2. Diagrama de dos sistemas discretos de carga; la fuerza se calcula sobre la carga Q

El siguiente nivel de complejidad viene cuando la distribución $\{q_i, \vec{r}_i\}$ se vuelve continua, es decir, son tantas las cargas acumuladas en una determinada región (del orden del número de Avogadro, i.e., $6,02 \times 10^{23}$ cargas) que la distribución toma tamaño y forma. Más adelante se profundizarán estas ideas.

1.2.3. Ejemplos y técnicas de solución

En esta sección se mostrarán algunos pasos que pueden ayudar a resolver problemas de fuerzas entre cargas puntuales. Estos pasos se aplicarán a algunos ejemplos para ayudar al lector a resolver problemas de esta índole. Primero se enunciarán los pasos:

1. Analice y plantee la pregunta del problema, haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.

2. Identifique primero la carga Q sobre la cual se debe calcular la fuerza, reconozca su valor y sus coordenadas.
3. Localice las cargas que ejercen fuerza sobre la carga en cuestión. Dibuje una flecha que conecte cada carga q_i con la carga que siente la fuerza Q . Si la fuerza es repulsiva la flecha se dirige desde q_i hacia Q , si la fuerza es atractiva esta se dirige desde Q hacia q_i .
4. Calcule la fuerza ejercida por cada carga. Para esto se debe identificar primero la distancia entre Q y q_i ; esta distancia puede calcularse con ayuda de la flecha dibujada. Recuerde que la fuerza es un vector, así que la flecha debe descomponerse en sus componentes x , y y z con ayuda de las flechas dibujadas respetando la dirección de estas.
5. Sume las contribuciones de todas las fuerzas (la asociada a cada carga), recuerde sumar cada una de las tres componentes entre sí. El resultado le debe proporcionar las componentes totales, F_x , F_y y F_z .
6. Si desea encontrar la magnitud y dirección de la fuerza total, use el teorema de Pitágoras y los cosenos directores.

Ejemplo 1. Un triángulo equilátero de lado $L = 50$ cm posee tres cargas, una en cada uno de sus vértices. Las cargas en los vértices que componen la base son (de izquierda a derecha) $q_1 = 2\mu\text{C}$ y $q_3 = -4\mu\text{C}$; la carga en el vértice superior es $q_2 = 7\mu\text{C}$. (a) Hallar una expresión para la fuerza eléctrica que siente la carga 2 en términos de q_1 , q_2 , q_3 y L . (b) Reemplazar los datos proporcionados para hallar la magnitud de la fuerza y dirección.

Solución

El problema se resuelve siguiendo los pasos proporcionados en esta sección:

1. Un dibujo apropiado que describe la situación es mostrado en la figura 1.3.
2. La carga q_2 es aquella sobre la cual se calculará la fuerza. Si el origen se coloca sobre la carga 1, las coordenadas de q_2 son $(L \cos \theta, L \sin \theta)$, donde $\theta = 60^\circ$, el ángulo entre dos lados de un triángulo equilátero (ver figura descrita en el paso 1).
3. Hay dos cargas que ejercen fuerza sobre q_2 , q_1 y q_3 . La fuerza que la carga 1 le ejerce es repulsiva, así la flecha va desde la carga 1 hacia la carga 2. La fuerza ejercida por la carga 3 es atractiva, la flecha así se dirige desde la carga 2 hacia la 3 (ver figura 1.4).

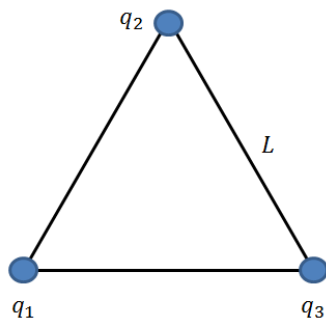


Figura 1.3. Triángulo con cargas en los vértices

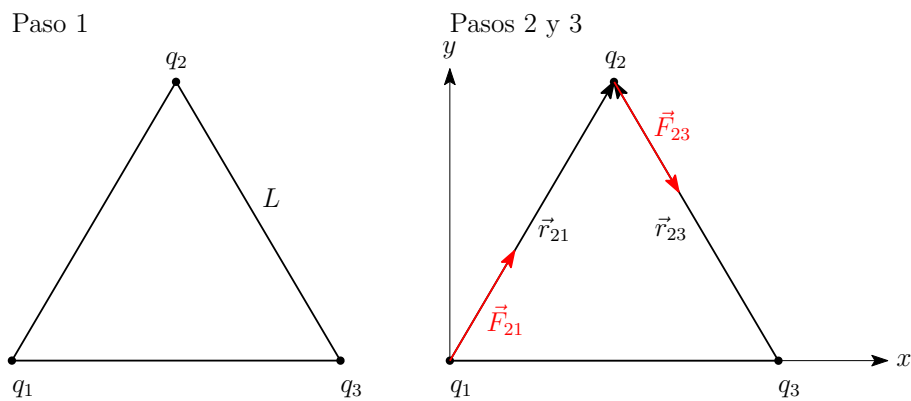


Figura 1.4. Pasos intermedios relacionados con el ejemplo 1 de la sección 1.2.3

4. Note que en un triángulo equilátero la distancia entre todas las cargas es L . La fuerza \vec{F}_{12} es entonces:

$$\vec{F}_{12} = \frac{k|q_1||q_2|}{L^2} (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) \quad (1.6)$$

La otra fuerza es:

$$\vec{F}_{23} = \frac{k|q_2||q_3|}{L^2} (\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j}) \quad (1.7)$$

Hay que tener en cuenta que se ha tomado el valor absoluto de todas las cargas $|q_1|$, $|q_2|$ y $|q_3|$. La dirección de las flechas en las fuerzas, mencionada en el punto anterior, ya contiene la información sobre los signos de las cargas. Por lo tanto, solamente las magnitudes de las cargas serán importantes de ahora en adelante.

5. La fuerza total es ahora esta:

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{23} = \frac{k|q_2|}{L^2} \left((|q_1| + |q_3|) \cos 60^\circ \hat{i} + (|q_1| - |q_3|) \sin 60^\circ \hat{j} \right) \quad (1.8)$$

Esta es la respuesta al inciso (a). Reemplazando la información proporcionada se encuentra:

$$\vec{F}_2 = (1,77 \hat{i} - 0,44 \hat{j}) \text{ N} \quad (1.9)$$

6. Se usa ahora el teorema de Pitágoras encontrando que:

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1,77)^2 + (-0,44)^2} \text{ N} = 1,81 \text{ N} \\ \phi &= \arctan \frac{F_y}{F_x} = 346^\circ \end{aligned} \quad (1.10)$$

El problema queda entonces solucionado. Es importante mencionar que la gran mayoría de calculadoras dan un ángulo de $\phi = -14^\circ$ a la respuesta anterior. Esto depende de si el ángulo se toma con respecto al eje x bien sea de forma horaria o antihoraria. Mientras que el valor 346° es el resultado encontrado haciendo el recorrido de forma antihoraria, el valor -14° es el encontrado haciendo el recorrido de la manera opuesta. La figura 1.5 ilustra esta idea y muestra el vector de fuerza total calculado.

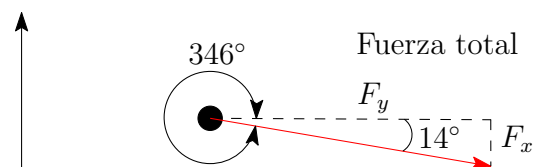


Figura 1.5. Fuerza total calculada en la Ec. (1.10)

Ejemplo 2. Dos cargas positivas, una de valor Q_1 y otra de valor Q_2 , se ubican sobre el eje x a lo largo de una línea recta. La separación entre las cargas es d . (a) Hacer un dibujo del problema e identificar las tres regiones relevantes asociadas al problema. (b) Si se ubica una tercera carga de carga Q_3 sobre la misma línea, identificar la única región donde la fuerza sobre esta carga puede ser cero. Explicar por qué en las otras dos regiones no es posible que la fuerza sea cero. (c) Calcular la distancia (respecto a cualquier carga y distinta a infinito) donde se debe ubicar la tercera carga para que la fuerza sobre esta sea cero. Nota: la respuesta debe quedar en términos de Q_1 , Q_2 y d .

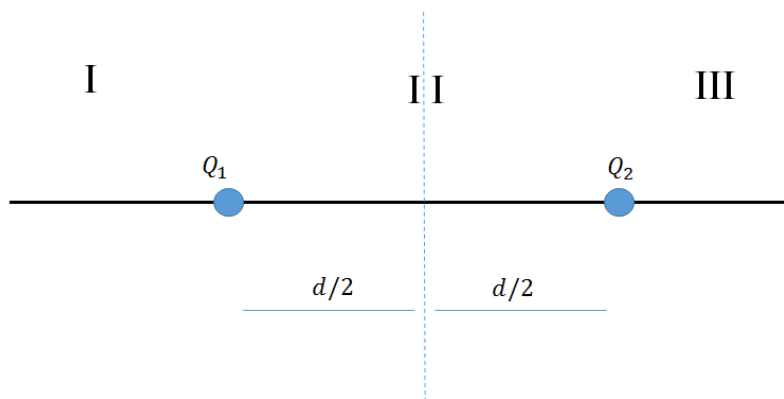


Figura 1.6. Dos cargas sobre la misma línea

Solución

Aunque no se seguirán los pasos descritos de manera estricta, se indicará de manera detallada el análisis.

(a) El origen se ubica en la mitad de las dos cargas y la línea a lo largo del eje x . El sistema forma tres regiones sobre la recta, la primera I, $-\infty < x < -d/2$, es la parte izquierda; la segunda II, $-d/2 < x < d/2$, es la parte entre las cargas; y la tercera III, $-d/2 < x < \infty$, a la derecha. En la figura 1.6 se muestra un esquema.

(b) La región debe ser la II. Para ver por qué la I y la III se descartan se puede analizar la situación. Suponga que la carga Q_3 es positiva y se coloca en la región I, en este caso tanto la carga 1 como la 2 la repelen (la mandan hacia la izquierda), y no habría forma de que estas dos fuerzas se cancelen; si la carga fuese negativa, ambas cargas la atraerían mandándola hacia la derecha, sin forma alguna de compensar las fuerzas. En la región III algo similar sucede, se deja al lector analizar los detalles (ver figura 1.7).

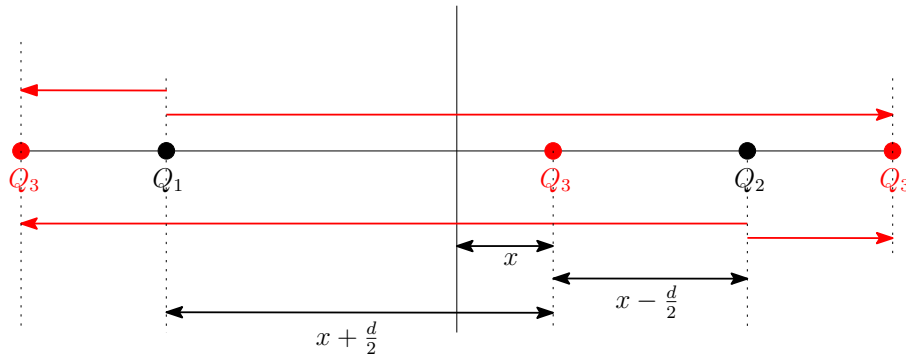


Figura 1.7. Tres regiones asociadas al sistema de dos cargas sobre una misma línea

(c) En la región II se calcula la fuerza total. Tomando x como la distancia (por ahora desconocida) de la carga 3 respecto al origen, se encuentra:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_3}{(x + d/2)^2} - \frac{Q_2 Q_3}{(x - d/2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{(x + d/2)^2} = \frac{Q_2}{(x - d/2)^2}$$

$$\sqrt{Q_1}(x - d/2) = \pm \sqrt{Q_2}(x + d/2) \quad (1.11)$$

La ecuación anterior es despejada encontrando dos soluciones (usando cada uno de los signos). La primera se descarta porque cae fuera de la región II, y está dada por

$x = \frac{\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2}}{2(\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2})}d$. La otra solución es la que si tiene sentido, el resultado es:

$$x = \frac{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}{2(\sqrt{Q_1} + \sqrt{Q_2})}d \quad (1.12)$$

El lector puede notar que si $Q_1 = Q_2$, la distancia es $x = 0$, la parte media, lo cual es de esperarse.

1.3. El campo eléctrico

En lo que va hasta ahora, se ha analizado la acción de la fuerza eléctrica sobre un sistema de cargas a través de la ley de Coulomb. Sin embargo, no se ha mencionado completamente el carácter mecánico de la fuerza eléctrica.

En su origen puramente mecánico, la fuerza eléctrica también es capaz de cambiar el estado de movimiento de los sistemas de cargas eléctricas. Esto es, hacer que cambie su movimiento.

Se debe enfatizar que la fuerza eléctrica, estudiada anteriormente, siempre se debe definir entre dos entidades (en la sección anterior se estudiaron cargas puntuales). La fuerza eléctrica entre las cargas 1 y 2, por ejemplo, se puede visualizar de dos maneras: a) si se analiza \vec{F}_{12} , la fuerza que 1 siente debido a 2, podemos imaginar que la carga 2 genera un efecto eléctrico que la carga 1 siente, siendo la fuerza este efecto de reacción; b) similarmente \vec{F}_{21} , la fuerza que la carga 2 siente debido a la carga 1, procede de un efecto eléctrico que la carga 1 genera sobre la 2; al sentir la carga 2 este efecto se genera la fuerza eléctrica.

Notemos, sin embargo, que si la carga 1 (o la carga 2) está sola, este efecto eléctrico no desaparece, sigue existiendo. Este efecto que genera una única carga se denomina campo eléctrico. La fuerza eléctrica, de acuerdo con esta visión, se origina cuando una carga eléctrica siente un campo eléctrico generado por otra(s) carga(s). Típicamente, una única carga (o conjunto de ellas) genera (o generan) un campo eléctrico sobre el espacio. Este campo eléctrico estará presente en el espacio (independientemente de si existe o no otra u otras que lo sientan), pero una vez se coloque una carga eléctrica en algún punto del espacio, esta reacciona al campo y se genera esta fuerza. Otra forma de entender este concepto es que el campo eléctrico es la fuerza que siente una carga imaginaria, o carga de prueba, en un punto arbitrario del espacio debido a la presencia de otras. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el campo y la fuerza son conceptos diferentes, que ni siquiera poseen las mismas unidades. Aunque esta interpretación ayuda y es explicada así en otros textos, entender el campo como una fuerza sobre una carga de prueba podría no ser la forma más adecuada de hacerlo.

Al igual que en la sección anterior, se estudiará primero el campo eléctrico generado por una única carga puntual, de valor q . Se usarán las siguientes notaciones: a) \vec{r}_q es la posición de la carga que genera el campo; b) \vec{r}_p es la posición del punto

de observación del campo (el punto donde el campo eléctrico generado por la carga q desea ser calculado, o la distancia a la carga de prueba, en la otra interpretación); c) $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_q$ es la distancia entre el punto de observación y la carga y \hat{r} el vector unitario que indica dicha dirección. La ley de Coulomb para el campo eléctrico, denotado por \vec{E} , toma entonces la siguiente forma:

$$\vec{E} = \frac{kq}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^2} \hat{r} = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \quad (1.13)$$

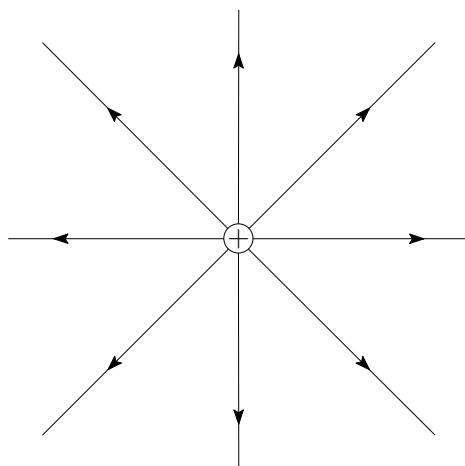
Notemos que, a diferencia con la Ec. (1.1), la última ecuación únicamente posee una carga. Las unidades en las que se mide el campo eléctrico son N/C. La conexión con la fuerza eléctrica es que una carga puntual de valor Q , en presencia de un campo eléctrico \vec{E} , siente una fuerza:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (1.14)$$

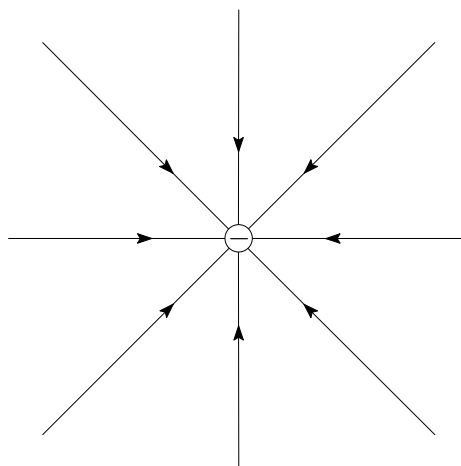
Así, la fuerza se visualiza como el efecto que un campo eléctrico genera sobre una carga.

Antes de detallar este campo eléctrico, vale la pena visualizarlo. Aunque no hay una forma sencilla de hacerlo, es útil apoyarse de un concepto muy importante llamado las líneas de campo, que son tan solo una forma de representar este efecto eléctrico, pero son muy útiles para calcular de manera correcta el campo generado por un conjunto de muchas cargas. Algunas de las características más importantes de las líneas de campo se observan en la figura 1.8

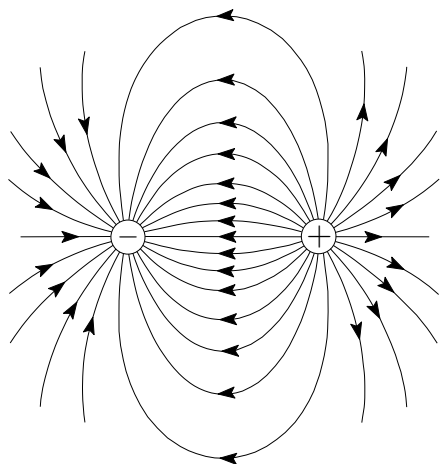
- Las líneas de campo no se cruzan entre ellas. Si lo hicieran, significaría que el campo eléctrico toma diferentes valores en el espacio. El valor del campo en un punto es único.
- En cada punto el vector campo eléctrico es tangente a las líneas de campo.
- Las líneas de carga tienen orientación. Estas salen de las cargas positivas y entran a las negativas.
- Las líneas de carga son perpendiculares a la superficie que las genera.
- La densidad de las líneas de carga en un punto es proporcional al valor del campo en dicho punto. Gráficamente, entre mayor sea el valor de las cargas, más líneas se deben dibujar.



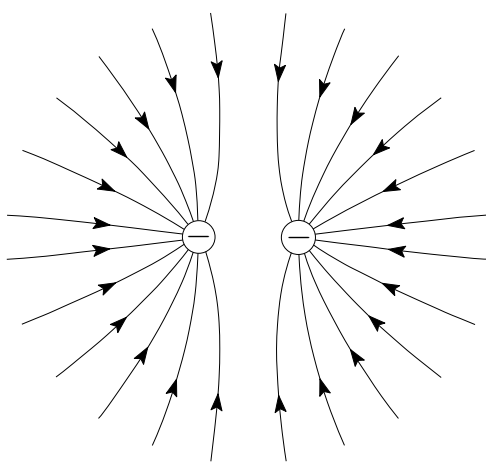
(a) Líneas de campo para un protón



(b) Líneas de campo para un electrón



(c) Líneas de campo para un dipolo



(d) Líneas de campo para dos electrones

Figura 1.8. Líneas de campo de varias distribuciones de carga; de izquierda a derecha y en orden descendente se muestran las líneas de campo generadas por: un protón, un electrón, un protón y un electrón, dos electrones

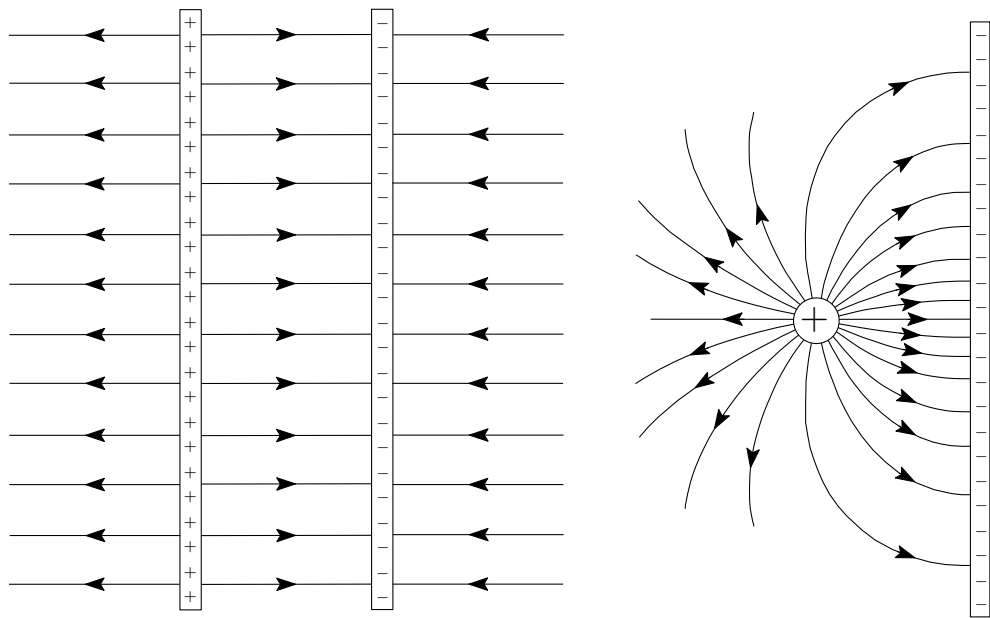


Figura 1.9. Líneas de campo de varias distribuciones; de izquierda a derecha se muestran las líneas de campo generadas por: a) dos barras rectas, una con carga positiva y la otra con carga negativa y b) una carga positiva puntual positiva y una barra recta de carga negativa

1.3.1. Distribuciones discretas de carga

Una vez se ha definido el campo generado por una sola carga, se puede usar este resultado para poder calcular el campo generado por muchas cargas puntuales en un punto arbitrario en el espacio (usando, de nuevo, el principio de superposición). Si existen N cargas puntuales generando un efecto en un punto con coordenadas \vec{r}_p , cada una con una carga q_i , en una posición \vec{r}_{q_i} , el campo total en dicho punto es, usando Ec. (1.13) (se define $\vec{r}_i = \vec{r}_p - \vec{r}_{q_i}$), el siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{kq_1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_1}|^2} \hat{r}_1 + \frac{kq_2}{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_2}|^2} \hat{r}_2 + \cdots + \frac{kq_N}{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_N}|^2} \hat{r}_N \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{kq_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^2} \hat{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{kq_i}{r_i^2} \hat{r}_i\end{aligned}\tag{1.15}$$

1.3.2. Ejemplos y técnicas de solución

En esta sección se mostrarán algunos pasos para calcular el campo generado por cargas puntuales. También se desarrollarán algunos ejemplos para indicar cómo seguir estos pasos. Los pasos sugeridos son los siguientes:

1. Analice y plantee la pregunta del problema, haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.
2. Identifique primero el punto sobre el cual se debe calcular el campo, reconozca sus coordenadas de acuerdo con el marco de referencia escogido.
3. Localice las cargas que ejercen campo sobre el punto en cuestión. Dibuje una flecha que conecte cada carga q_i con este punto. Si la carga es positiva, la flecha se dirige desde la carga hacia el punto; si la carga es negativa, esta se dirige desde el punto hacia la carga.
4. Calcule el campo ejercido por cada carga. Para esto se debe identificar primero la distancia entre el punto y q_i ; esta distancia puede calcularse con ayuda de la flecha dibujada. Recuerde que el campo es un vector, así que la flecha debe descomponerse en sus componentes x , y y z con ayuda de las flechas dibujadas, respetando la dirección de estas.
5. Sume las contribuciones de todos los campos (el asociado a cada campo), recuerde sumar cada una de las tres componentes entre sí. El resultado le debe proporcionar las componentes totales, E_x , E_y y E_z .

6. Si desea encontrar la magnitud y dirección del campo total, use el teorema de Pitágoras y los cosenos directores.

Ejemplo 1. Encontrar, en función de ϵ_0 , a y q , la magnitud y dirección del campo eléctrico generado por el cuadrado mostrado en la figura 1.10 en (a) el centro del cuadrado y (b) la parte media de la base inferior.

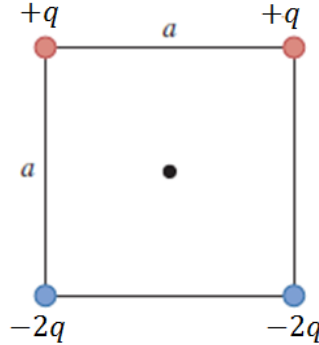


Figura 1.10. Cuadrado con cuatro cargas en los vértices

Solución

Debido a los requisitos del problema, se debe usar la constante $\epsilon_0 = 1/4\pi k$. Primero se aplican los pasos para encontrar el campo en el centro del cuadrado.

1. El dibujo ya está proporcionado por el enunciado.
2. El punto está marcado de negro en el dibujo. Si el origen se ubica en la esquina inferior izquierda, sus coordenadas son $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$.
3. Las cuatro cargas ejercen campo, se denotarán como 1, 2, 3 y 4 desde la inferior izquierda y de ahí en adelante en el sentido de las agujas del reloj (ver figura 1.11).
4. La distancia entre todas las cargas y el centro es $a/\sqrt{2}$. Por la dirección de las flechas se encuentra

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \frac{2q[-\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2} & \vec{E}_2 &= \frac{q[\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2} \\ \vec{E}_3 &= \frac{q[-\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2} & \vec{E}_4 &= \frac{2q[\cos 45^\circ \hat{i} - \sin 45^\circ \hat{j}]}{4\pi\epsilon_0(a/\sqrt{2})^2}\end{aligned}\quad (1.16)$$

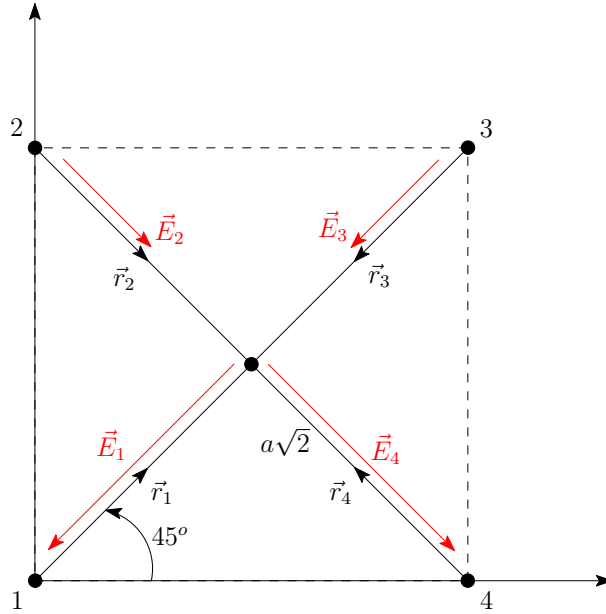


Figura 1.11. Campo ejercido en el centro de un cuadrado por cuatro cargas en sus vértices

5. Se suman los campos encontrando que:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left[\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \hat{i} + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \hat{j} \right] \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left[0\hat{i} - \frac{6}{\sqrt{2}}\hat{j} \right]\end{aligned}\quad (1.17)$$

6. Con la información dada, la magnitud y dirección del campo son:

$$|\vec{E}| = \frac{3q}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}, \quad \phi = 270^\circ \quad (1.18)$$

Una manera más sencilla de desarrollar el ejemplo anterior es explotando más profundamente el concepto de las líneas de campo (ver figura 1.12). Se dibuja una línea para las cargas con magnitud q y dos para las de magnitud $2q$, respetando su dirección de acuerdo con el campo generado. Como se indica en la figura, las líneas se simplifican y el campo se puede visualizar como el generado por tres veces el campo 2 (el producido por la carga 2) más tres veces el campo 3 (el generado por la carga 3). Con esto $\vec{E} = 3\vec{E}_2 + 3\vec{E}_3$ y simplificando se obtiene la misma respuesta.

Para calcular el campo sobre la parte media de la base inferior, se hace un procedimiento similar. Siguiendo los mismos pasos se encuentra (el lector puede verificar por sí mismo):

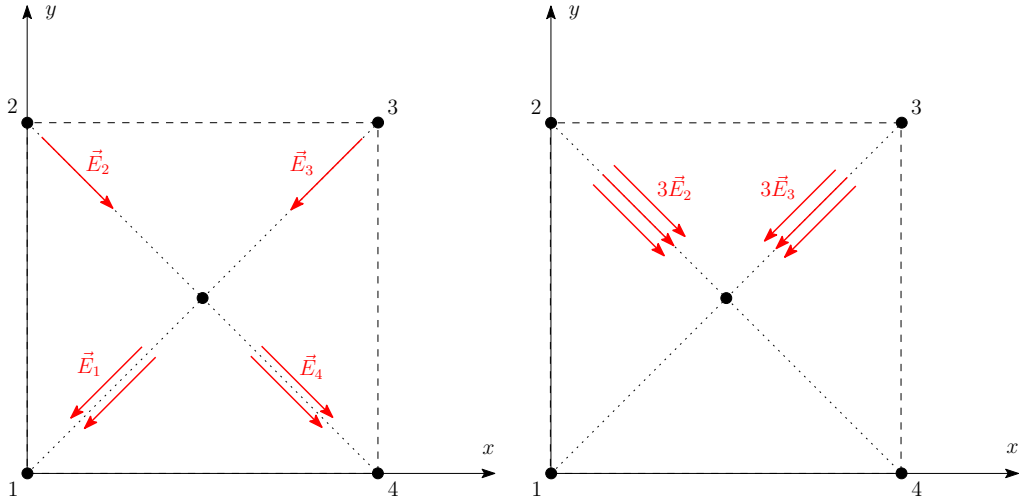


Figura 1.12. Simplificación del campo en el centro del cuadrado usando el concepto de líneas de campo

$$\begin{aligned}
 \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 \\
 &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0(\frac{a}{2})^2}(-\hat{i} + 0\hat{j}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\frac{\sqrt{5}a}{2})^2}\left(\frac{a/2}{\sqrt{5}a/2}\hat{i} - \frac{a}{\sqrt{5}a/2}\hat{j}\right) \\
 &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\frac{\sqrt{5}a}{2})^2}\left(-\frac{a/2}{\sqrt{5}a/2}\hat{i} - \frac{a}{\sqrt{5}a/2}\hat{j}\right) + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0(\frac{a}{2})^2}(\hat{i} + 0\hat{j}) \\
 &= \frac{2q}{5\pi\epsilon_0 a^2}\left(0\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right)
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

o

$$|\vec{E}| = \frac{4q}{5\sqrt{5}\pi\epsilon_0 a^2} \quad , \quad \phi = 270^\circ \tag{1.20}$$

Es importante aclarar que en ambos casos no hay campo en la dirección z , ya que el ejercicio fue planteado en dos dimensiones. Muchas veces se omitirá el cálculo de esta componente.

Ejemplo 2. Seis cargas puntuales se encuentran localizadas en las esquinas de un hexágono regular de lado $a = 10$ cm. (a) Calcular el campo eléctrico en el centro del hexágono si $Q = 2 \mu\text{C}$. (b) Suponga que un protón se coloca en el centro del hexágono, calcular la fuerza que siente el protón. (c) Hacer lo mismo si es un electrón el que se coloca en el centro de la figura.

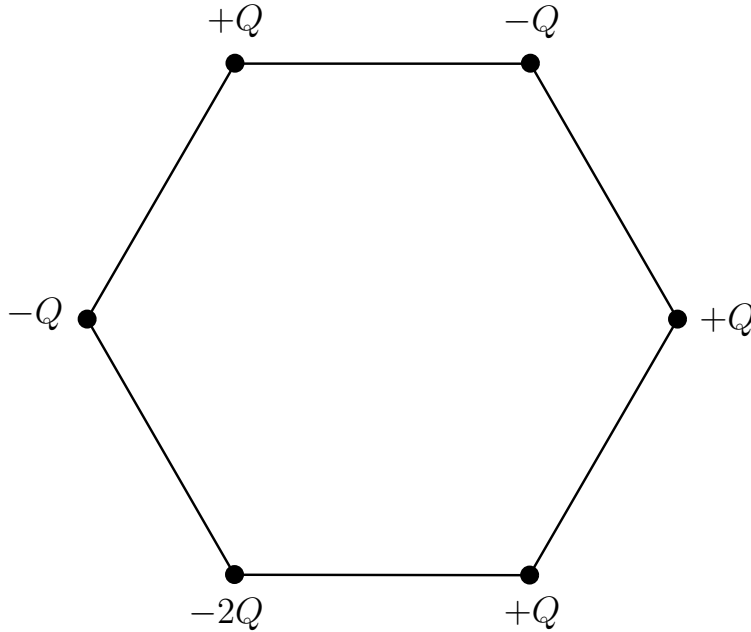


Figura 1.13. Hexágono con cargas en sus vértices

Solución

(a) El ejemplo se resolverá simplificando los efectos de las cargas, con ayuda del concepto de las líneas de campo, utilizando la figura 1.13 como punto de partida.

Es fácil notar por la figura 1.14 que el efecto de las cargas 1 y 4 se cancela mutuamente, las líneas de campo de estas son iguales pero la dirección es opuesta. El campo generado por las cargas 3 y 6 es igual, así tenemos en cuenta únicamente el campo de la 3 multiplicado por un factor de dos. Además el efecto de las cargas 2 y 5 se reduce a la mitad del efecto de carga 5. El campo total es entonces:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 2\vec{E}_3 + \frac{1}{2}\vec{E}_5 = 2\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(-\hat{i}) + \frac{1}{2}\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}[-\cos 60^\circ \hat{i} - \sin 60^\circ \hat{j}] \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left[\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right] = (-4,50 \times 10^6, -1,56 \times 10^6, 0) \text{ N/C}\end{aligned}\quad (1.21)$$

En términos de magnitud y dirección

$$E = |\vec{E}| = \frac{\sqrt{7}Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 4,76 \times 10^6 \text{ N/C} , \quad \phi = 199,1^\circ \quad (1.22)$$

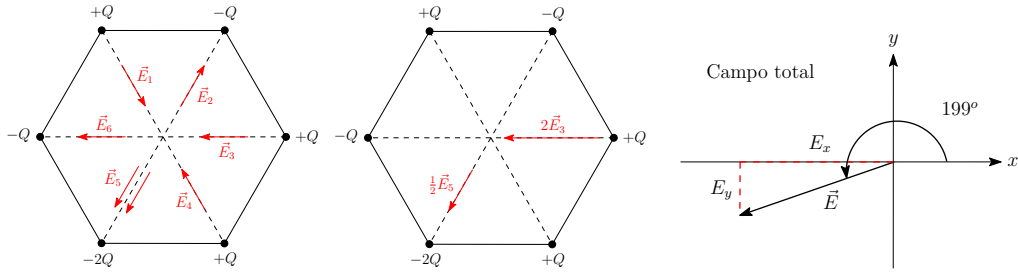


Figura 1.14. Diagramas que muestran el procedimiento del cálculo del campo de un hexágono con cargas en los vértices

(b) Se usará la Ec. (1.14), $\vec{F} = Q_o \vec{E}$. El protón siente el campo que se acaba de calcular; así la fuerza que este siente es el campo multiplicado por su carga, $Q_o = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Como la carga es positiva, la dirección del campo no cambia y así:

$$F = |\vec{F}| = 7,62 \times 10^{-13} \text{ N} , \quad \phi = 199,1^\circ \quad (1.23)$$

(c) La única diferencia con el electrón (además de la magnitud de la fuerza) es que la carga es negativa; esto invierte la dirección de la fuerza, así el ángulo rota 180° . Por lo tanto, se tiene:

$$F = |\vec{F}| = 7,62 \times 10^{-13} \text{ N} , \quad \phi = 19,1^\circ \quad (1.24)$$

Por regla general, las cargas positivas siempre van en la dirección del campo, mientras que las cargas negativas van en la dirección contraria.

1.3.3. Distribuciones continuas de carga

¿Qué sucede si las fuentes de carga no son partículas puntuales? El siguiente paso sería estudiar el campo eléctrico generado por un objeto cargado con un tamaño considerable. Aunque no existe una fórmula particular para calcular el campo generado por un objeto que no sea puntual, un objeto de tamaño finito se puede imaginar como si estuviese formado por un conjunto muy grande (infinito, de hecho) de cargas puntuales. Como ya se sabe cómo calcular el campo de cada carga puntual, lo que faltaría es sumar la contribución de todas ellas.

El proceso es el siguiente. Se parte de la carga mostrada en la figura 1.15. Esta carga es dividida en pedazos muy pequeños (infinitesimalmente pequeños), de manera que cada uno contenga una carga de valor dq . Cada carga de valor dq está en una posición \vec{r}_q con respecto al marco de referencia. Si la posición del punto de observación es \vec{r}_p , la distancia entre el punto de observación y esta pequeña carga es $r = |\vec{r}_p - \vec{r}_q|$. Esta carga genera entonces un campo infinitesimal de valor $d\vec{E}$. Sin embargo, para hallar el campo total debemos sumar todas las posibles contribuciones de cada carga infinitesimal dq . Cuando los pedazos son tan pequeños que los hacemos puntuales, $dq \rightarrow 0$ y la suma habitual se transforma en una integral. Esto se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$\vec{E} = \int \frac{k dq}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|^2} \hat{r} = \int \frac{k dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.25)$$

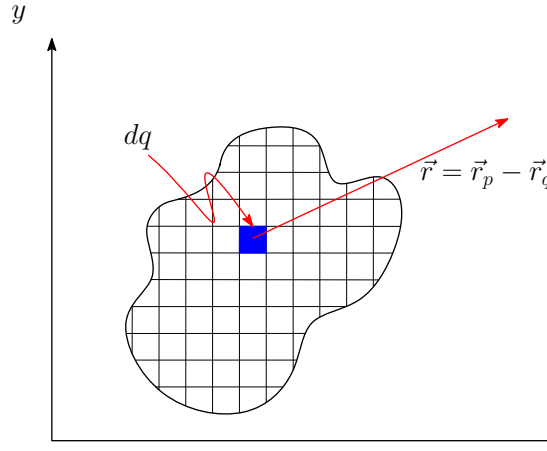


Figura 1.15. Campo generado por distribuciones continuas

Un punto clave en la evaluación de las integrales que aparecen en este tipo de sistemas es cómo escribir el término dq . Recuerde que la posición \vec{r}_q dependerá de las coordenadas del sistema y así dq incluirá las coordenadas correspondientes. Esta conexión aparecerá a través de la densidad de carga. De acuerdo con la geometría del sistema, se pueden distinguir los objetos que contienen las cargas en tres tipos de categorías

- *Unidimensionales.* Aquellos donde el objeto se puede reducir a una única dimensión, dado que dos de las tres dimensiones son irrelevantes. Esto sucede en el caso de barras delgadas, anillos delgados, entre otros. En este caso se puede

definir una densidad lineal de carga de la forma $\lambda = \frac{dq}{ds}$. Acá ds representa la coordenada a lo largo de la cual el objeto está distribuido y, por lo tanto, es la coordenada respecto a la cual la integral debe ser realizada.

- *Bidimensionales.* Aquellos donde el objeto se puede reducir a dos dimensiones, dado que una de las tres dimensiones es irrelevante. Esto sucede en el caso de discos, planos rectangulares, entre otros. Acá se puede definir una densidad superficial de carga de la forma $\sigma = \frac{dq}{dA}$. Ahora dA representa un elemento de área, ya que el objeto se difunde a lo largo de una superficie.
- *Tridimensionales.* Aquellos donde ninguna de las tres dimensiones puede ser ignorada. Esto sucede en el caso de esferas, cilindros o muchos otros objetos que ocupan un volumen. Para estos objetos se define una densidad volumétrica de la forma $\rho = \frac{dq}{dV}$. Acá dV representa un elemento de volumen, y se debe integrar a lo largo de este.

Un caso particular aparece cuando la carga Q del objeto está distribuida de manera uniforme. Esto significa que la densidad es constante (no depende de las coordenadas). Para los tres casos descritos anteriormente la densidad se puede escribir de la siguiente manera:

- *Unidimensionales.* Para una línea cargada de longitud L , $\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{Q}{L}$. Si el objeto es un anillo cargado de radio R , $\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{Q}{2\pi R}$.
- *Bidimensionales.* Si el objeto es un rectángulo de base a y altura b , $\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{Q}{ab}$. Si el objeto es un disco de radio R , $\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{Q}{\pi R^2}$.
- *Tridimensionales.* Si el objeto es una caja de dimensiones $a \times b \times c$, $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{abc}$. Cuando el objeto es un cilindro de radio R y altura h , $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{\pi R^2 h}$. Para una esfera de radio R , $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

1.3.4. Ejemplos y técnicas de solución

Aunque los pasos para calcular el campo eléctrico generado por distribuciones continuas son similares a los que involucran distribuciones discretas, hay ciertas diferencias. Los pasos que se sugieren seguir son los siguientes:

1. Entienda la pregunta del problema y haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.
2. Identifique primero el punto sobre el cual se debe calcular el campo, reconozca sus coordenadas.

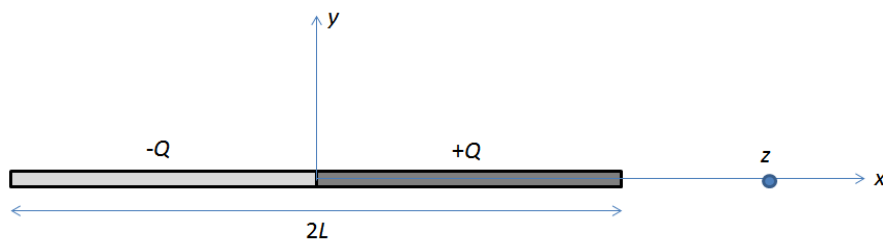
3. Identifique si el objeto cargado es unidimensional, bidimensional o tridimensional. Para el caso correspondiente, defina la densidad de carga apropiada.
4. En el objeto donde se localiza la carga identifique un lugar arbitrario que contiene una carga infinitesimal dq , reconozca sus coordenadas y las del punto de observación, para así calcular la distancia entre estos dos puntos. Trace una línea que conecte los puntos respetando la dirección de la flecha. El tamaño de esta línea es la distancia r que debe depender de las coordenadas del sistema.
5. Escriba el campo infinitesimal $d\vec{E}$ ejercido por esta pequeña porción. Recuerde que el campo es un vector, así que la flecha dibujada en el punto anterior debe descomponerse en sus componentes x , y y z con ayuda de las flechas dibujadas. Esta descomposición dará las componentes del campo.
6. Escriba dq en función de la densidad y las coordenadas y plantee las integrales (una para cada componente) que aparecen colocando los límites de integración apropiados. Estos límites deben depender de las dimensiones del objeto. Disfrute la integración y calcule el campo total; cada componente corresponde al valor de una integral.
7. Si desea encontrar la magnitud y dirección del campo total, use el teorema de Pitágoras y los cosenos directores.

Ejemplo 1. Una línea cargada unidimensional de lado $2L$ yace sobre el eje x y tiene la siguiente distribución de carga (su centro está localizado en el origen): la mitad del lado izquierdo posee una carga negativa total $-Q$ uniformemente distribuida, la mitad del lado derecho posee una carga positiva $+Q$ también uniformemente distribuida. Calcular el campo eléctrico en un punto a una distancia z sobre el eje x tal que $z > L$.

Solución

Se siguen los pasos indicados.

1. El siguiente es un dibujo apropiado



2. El punto donde deseamos calcular el campo tiene coordenadas $(z, 0)$.
3. El objeto es unidimensional; por lo tanto, se define una densidad de carga unidimensional λ . Sin embargo, esta no es constante ya que es diferente para el lado derecho e izquierdo. Para el lado izquierdo es constante con valor $\lambda_- = -\frac{Q}{L}$, para el derecho es positiva de valor $\lambda_+ = \frac{Q}{L}$. En términos más compactos:

$$\lambda = \begin{cases} -\frac{Q}{L} & , \quad -L \leq x < 0 \\ +\frac{Q}{L} & , \quad 0 < x \leq L \end{cases} \quad (1.26)$$

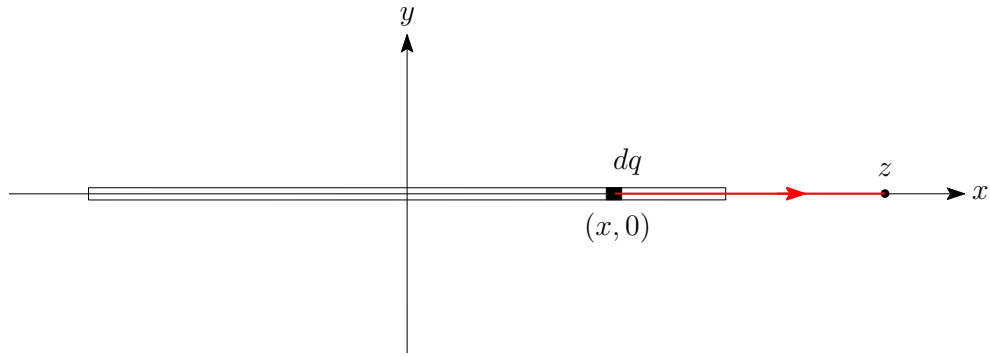


Figura 1.16. Cálculo del campo generado por una línea cargada

4. El pequeño pedazo mostrado en la figura 1.16 posee una carga dq y tiene coordenadas $(x, 0)$; la flecha se dirige de izquierda a derecha ya que siempre va de la carga al punto de observación. El vector que nos proporciona la distancia es $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{r}_q = (z, 0, 0) - (x, 0, 0) = (z - x, 0, 0)$. La distancia de ese trozo al punto en cuestión es $r = z - x$.
5. En este caso, la flecha es totalmente horizontal, así su dirección es $\hat{r} = \frac{1}{z-x}((z-x)\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) = \hat{i}$. El campo infinitesimal es entonces:

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{(z-x)^2} (\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}) \quad (1.27)$$

6. Para este ejercicio $dq = \lambda dx$ ($ds = dx$, porque el objeto se orienta a lo largo de la dirección x). Los límites de la integración son $-L$ y L , las coordenadas donde comienza y termina la barra respecto a la variable de integración. El campo es así:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int_{-L}^L \frac{k\lambda dx}{(z-x)^2} \hat{i} = \int_{-L}^0 \frac{k\lambda_- dx}{(z-x)^2} \hat{i} + \int_0^L \frac{k\lambda_+ dx}{(z-x)^2} \hat{i} \\
&= -\frac{kQ}{L} \int_{-L}^0 \frac{dx}{(z-x)^2} \hat{i} + \frac{kQ}{L} \int_0^L \frac{dx}{(z-x)^2} \hat{i} \\
&= -\frac{kQ}{L} \frac{1}{z-x} \Big|_{-L}^0 \hat{i} + \frac{kQ}{L} \frac{1}{z-x} \Big|_0^L \hat{i} \\
&= -\frac{kQ}{L} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+L} \right) \hat{i} + \frac{kQ}{L} \left(\frac{1}{z-L} - \frac{1}{z} \right) \hat{i} \\
&= -\frac{kQ}{L} \left(\frac{2}{z} - \frac{1}{z-L} - \frac{1}{z+L} \right) \hat{i} \tag{1.28}
\end{aligned}$$

Esta es entonces la respuesta al problema, no hay necesidad de encontrar la magnitud y dirección, ya se sabe que va en dirección x .

Ejemplo 2. Un disco aislante de radio R posee una carga Q . La carga está uniformemente distribuida. (a) Determine, en términos de Q , R y z , el campo eléctrico asociado a un punto que pasa por el eje del disco (ver figura 1.17). (b) Si $R = 5$ cm y $Q = 3$ nC, hallar el campo eléctrico cuando $z = R$ y $z = 2R$.

Solución

Se siguen, de nuevo, los pasos sugeridos:

1. El dibujo se muestra en la figura 1.17.
2. El punto de observación posee coordenadas $\vec{r}_p = (0, 0, z)$.
3. El objeto es bidimensional. La densidad es $\sigma = \frac{dq}{dA}$. Como la densidad es constante, su valor es simplemente la carga total sobre el área total, $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$.
4. Para hacer este punto se debe localizar un punto arbitrario sobre el disco, que contiene carga dq . Es más fácil trabajar en coordenadas polares, ya que son las típicas asociadas a un disco. Un punto en el disco tiene coordenadas $\vec{r}_q = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j}$. Acá r es la coordenada radial, que está entre 0 y R y θ es el ángulo entre 0 y 2π . Se concluye entonces que $\vec{r}_p - \vec{r}_q = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, z)$. Se tiene que:

$$|\vec{r}_p - \vec{r}_q| = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \hat{r} = \frac{-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}}{\sqrt{r^2 + z^2}} \tag{1.29}$$

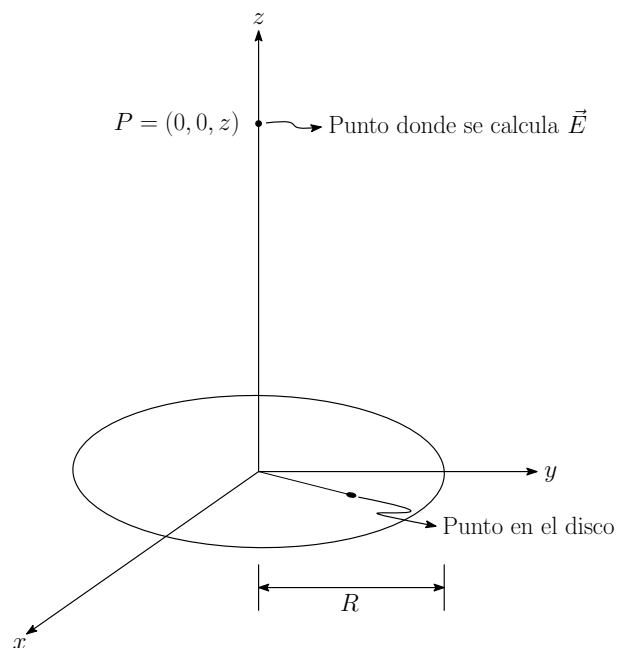


Figura 1.17. Disco cargado

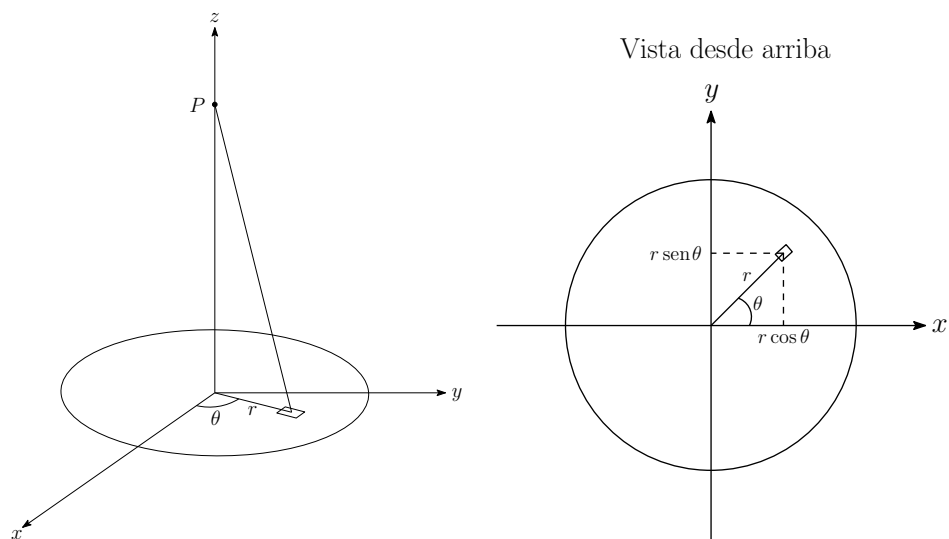


Figura 1.18. Cálculo del campo generado por un disco cargado

5. Juntando los resultados se deduce que:

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) \quad (1.30)$$

6. De los resultados anteriores también se puede deducir que $dq = \sigma dA = \frac{Q}{\pi R^2} dA = \frac{Q}{\pi R^2} r dr d\theta$. Hay que recordar que en coordenadas polares $dA = r dr d\theta$. En este caso, los límites son $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (los límites asociados a un disco entero). Ahora se tiene:

$$\vec{E} = \frac{kQ}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + z^2)^{3/2}} (-r \cos \theta \hat{i} - r \sin \theta \hat{j} + z \hat{k}) \quad (1.31)$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$, las componentes E_x y E_y se cancelan. El campo es por lo tanto $\vec{E} = E_z \hat{k}$:

$$E_z = \frac{kQz}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi kQz}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.32)$$

Ahora, bajo la sustitución $u = z^2 + r^2$ la integral toma esta forma:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2kQz}{R^2} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{2u^{3/2}} = -\frac{2kQz}{R^2} u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2} \\ &= \frac{2kQz}{R^2} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

El problema general queda solucionado. (b) Se reemplazan los datos proporcionados encontrando $\vec{E}(z = R) = 6,37 \hat{k} \text{ kN/C}$ y $\vec{E}(z = 2R) = 2,28 \hat{k} \text{ kN/C}$.

Ejemplo 3. ¿Qué hacer cuando la densidad no es constante?

Suponga que la densidad de la barra del ejemplo 1 no es constante, esto quiere decir que depende de las coordenadas. Un electricista construye una barra delgada cuya densidad toma la forma $\lambda = Cx^2$, donde C es una constante y x es la distancia horizontal de la barra respecto al origen. Si la barra tiene una carga total Q , (a) ¿en qué punto(s) la densidad toma el mínimo y máximo valor? (b) Calcular el valor de C . (c) Usar el resultado anterior para calcular el mínimo y máximo valor de la densidad. (d) Escribir dq en términos de las coordenadas.

Solución

(a) Se puede observar que la densidad depende explícitamente de x . Los máximos se dan cuando x toma su máximo valor, en $x = \pm L$. El mínimo se da cuando x toma su mínimo valor, en $x = 0$. (b) Se usa el hecho de que $\lambda = \frac{dq}{dx}$ o $dq = \lambda dx = Cx^2 dx$. Si la carga total es Q , esto quiere decir que si se integra dq entre $-L$ y L , el resultado es Q , la carga total de la barra. Este hecho se traduce así:

$$\int_{-L}^L dq = Q = \int_{-L}^L Cx^2 dx = C \int_{-L}^L x^2 dx = C \frac{x^3}{3} \Big|_{-L}^L = \frac{2C}{3} L^3 \quad (1.34)$$

De acá se despeja el valor de C encontrando $C = \frac{3Q}{2L^3}$. (c) La densidad es entonces $\lambda = \frac{3Qx^2}{2L^3}$. Como su máximo valor se da cuando $x = \pm L$, el máximo valor de la densidad es $\lambda_{max} = \frac{3Q}{2L}$. El mínimo valor es $\lambda_{min} = 0$, el valor cuando $x = 0$. (d) Los resultados anteriores implican que $dq = \lambda dx = \frac{3Qx^2}{2L^3} dx$.

1.4. Movimiento de partículas en campos eléctricos constantes*1.4.1. Las ecuaciones de movimiento*

Suponga que una partícula puntual se encuentra en presencia de campo eléctrico \vec{E} . De las relaciones (1.1) y (1.13) se puede concluir que la fuerza que una partícula con carga q siente es

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.35)$$

Si el campo eléctrico no es constante, dependiendo así de las coordenadas, esta fuerza cambia de punto a punto y el movimiento de la partícula es difícil de calcular en la gran mayoría de los casos. No obstante, cuando el campo eléctrico que siente la partícula es constante (no cambia de punto a punto), es fácil predecir la trayectoria de la partícula. Suponga que una partícula de masa m y carga q está en presencia de un campo eléctrico constante \vec{E} ; si no existe otra fuerza distinta a la eléctrica (como la gravedad, por ejemplo) actuando sobre la partícula, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$q\vec{E} = m\vec{a} \quad (1.36)$$

Esto implica que la partícula sentirá una aceleración, dada por las siguientes componentes

$$a_x = \frac{q}{m} E_x, \quad a_y = \frac{q}{m} E_y, \quad a_z = \frac{q}{m} E_z \quad (1.37)$$

Recordando las ecuaciones de la cinemática para una partícula en movimiento con aceleración constante, se puede concluir que la trayectoria de la partícula estará descrita por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_x t^2, & v_x(t) &= v_{0x} + \frac{q}{m} E_x t \\y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_y t^2, & v_y(t) &= v_{0y} + \frac{q}{m} E_y t \\z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E_z t^2, & v_z(t) &= v_{0z} + \frac{q}{m} E_z t\end{aligned}\tag{1.38}$$

Recuerde que x_0 , y_0 y z_0 son las posiciones iniciales de la partícula (al tiempo $t = 0$). Además, v_{0x} , v_{0y} y v_{0z} son las componentes iniciales de la velocidad al mismo tiempo.

En la gran mayoría de los casos el campo eléctrico está orientado en una dirección específica, en la dirección y , por ejemplo, así $\vec{E} = E\hat{j}$. Si se supone que la partícula se mueve inicialmente en dirección x con rapidez v , las ecuaciones que describen la trayectoria de la partícula se reducen notablemente (lo que sucede en la dirección z es irrelevante, además no hay aceleración en x y la velocidad inicial en y es nula). Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{0x}t, & v_x(t) &= v_{0x} \\y(t) &= y_0 + \frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2, & v_y(t) &= \frac{q}{m} E t\end{aligned}\tag{1.39}$$

El movimiento descrito por las ecuaciones anteriores es justamente un movimiento parabólico; la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la componente x , pero su movimiento es uniformemente acelerado en la dirección y .

Hay que aclarar que la trayectoria encontrada en el último caso es particular. Para cada situación el campo eléctrico apunta en una dirección diferente, además la posición y velocidad inicial de la partícula pueden diferir. El caso más general es el mostrado por las Ecs. (1.38), de ahí se pueden deducir las ecuaciones específicas para cada situación.

1.4.2. Ejemplos y técnicas de solución

Acá se muestran algunos pasos para deducir las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula bajo la influencia de un campo eléctrico constante.

1. Analice y plantee la pregunta del problema, haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.

2. Mire las fuerzas que actúan sobre la carga en movimiento. Además de la fuerza eléctrica podría aparecer la gravedad (aunque esta es despreciable en muchos casos). Después de analizar las fuerzas, use la segunda ley de Newton para hallar la aceleración del sistema.
3. Una vez encontrada la aceleración, escriba la trayectoria de la partícula describiendo el comportamiento de sus coordenadas en función del tiempo. Escoja el marco de referencia apropiado identificando la posición y velocidad inicial.
4. Use las ecuaciones de movimiento para encontrar la información requerida. De ahora en adelante el problema se reduce a uno de cinemática.

Ejemplo 1. Un electrón se desplaza hacia el este en un campo eléctrico uniforme de $E = 2,50 \text{ N/C}$ dirigido hacia el oeste. En el punto A la velocidad del electrón es $v = 7,50 \times 10^5 \text{ m/s}$ hacia el este. (a) Calcular la velocidad del electrón en el punto B , $0,41 \text{ m}$ al este del punto A . (b) Un protón se mueve en el campo del punto anterior. En el punto A su velocidad es $v = 2,90 \times 10^5 \text{ m/s}$ hacia el este. Calcular la velocidad del protón cuando pasa por primera vez por el punto B . (c) Justificar por qué no es necesario tener en cuenta la gravedad.

Solución

Se comienzan aplicando los pasos

1. El dibujo se muestra en la figura 1.19.

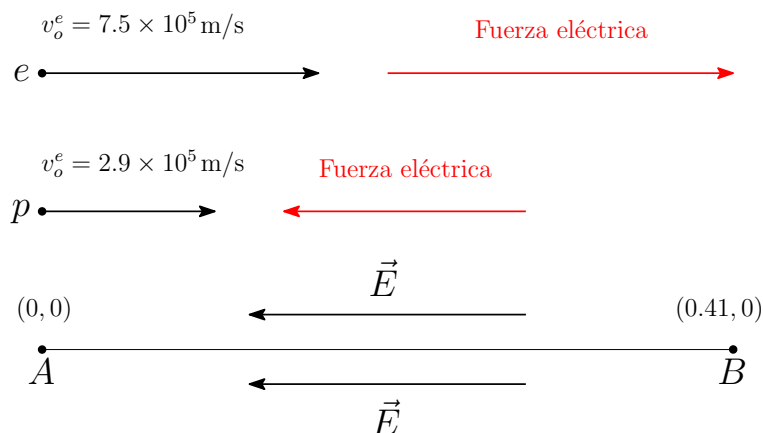


Figura 1.19. Fuerza generada sobre un electrón y un protón en movimiento

2. En ninguno de los casos (para el electrón y el protón) hay gravedad. Si se toma el este hacia la derecha, el campo va en la dirección $-\hat{i}$. Esto implica que la fuerza eléctrica sobre el electrón es hacia la derecha con magnitud qE (la carga es negativa y la fuerza se opone al campo), para el protón es hacia la izquierda (la carga es positiva, así que la fuerza va en la dirección del campo) con la misma magnitud. Recordar que $q = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Como no hay más fuerzas, la fuerza eléctrica se iguala a ma_x encontrando ($e \rightarrow$ electrón y $p \rightarrow$ protón) $a_x^e = \frac{qE}{m_e} = 4,40 \times 10^{11} \text{ m/s}^2$ y $a_x^p = -\frac{qE}{m_p} = -2,40 \times 10^8 \text{ m/s}^2$.
3. El punto A se toma como el origen, de tal manera que $x_0 = 0$ para las dos partículas. Además, por las condiciones dadas $v_0^e = 7,50 \times 10^5 \text{ m/s}$ y $v_0^p = 2,90 \times 10^5 \text{ m/s}$. Las ecuaciones de movimiento son (hay una ecuación para el electrón y otra para el protón, usando los datos para cada uno):

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad v_x(t) = v_0 + a t \quad (1.40)$$

4. Se comienza primero solucionando el problema para el electrón. Lo primero es hallar el tiempo que le toma al electrón alcanzar la posición B , si $x_B = 0,41 \text{ m}$ se obtiene la ecuación (todo en metros y segundos):

$$x_B = v_0^e t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m_e} t^2 \Rightarrow 0,41 = 7,50 \times 10^5 t + 2,2 \times 10^{11} t^2 \quad (1.41)$$

Esto proporciona una ecuación de segundo grado para t , con solución $t_1 = -3,89 \mu\text{s}$ y $t_2 = 4,79 \mu\text{s}$. Se toma el tiempo positivo ya que el negativo carece de sentido. Reemplazando en la ecuación para la velocidad se obtiene (en m/s) $v_B^e = 7,50 \times 10^5 + 4,4 \times 10^{11} \cdot 4,79 \times 10^{-6} = 2,86 \times 10^6 \text{ m/s}$. Para el protón se hace el mismo procedimiento con los datos apropiados, encontrando $t_1 = 1,42 \mu\text{s}$ y $t_2 = 2,42 \text{ ms}$. Reemplazando por t_1 , el tiempo cuando pasa por primera vez, se obtiene $v_B^p = 289,7 \text{ km/s}$. (c) La aceleración de la gravedad es $9,8 \text{ m/s}^2$, totalmente insignificante comparada con las aceleraciones proporcionadas por la fuerza eléctrica (calculadas en el ítem 2), así no hay necesidad de tenerla en cuenta.

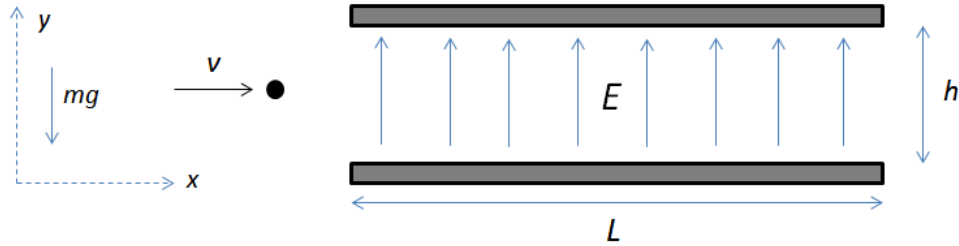
Ejemplo 2. Un protón viaja en línea recta hacia la derecha con velocidad constante v desconocida. Después de un momento entra en una región donde existe un campo eléctrico constante de valor $E = 430 \text{ N/C}$ dirigido hacia arriba; el protón entra justo por la mitad de la altura de la región. La región tiene una distancia horizontal $L = 30 \text{ cm}$ y una vertical $h = 5 \text{ cm}$. Desprecie el efecto de la gravedad a no ser que se diga lo contrario. (a) Hallar una expresión para la posición del protón en el eje y como función del tiempo. (b) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe tener el

protón para cruzar la región totalmente (para evitar que se choque contra las paredes de la región)? (c) Si se tuviera en cuenta el efecto de la gravedad, ¿cuál debería ser el valor del campo necesario para que el protón pase derecho a través de la región?

Solución

De nuevo se aplican los pasos sugeridos.

1. Un posible dibujo se muestra a continuación.



2. Como no se tiene en cuenta la gravedad, la única fuerza presente es la eléctrica, de valor $\vec{F} = qE\hat{j}$. Por la segunda ley de Newton la aceleración en y (en las otras coordenadas no hay aceleración) es $a_y = \frac{qE}{m} = 4,89 \times 10^{10} \text{ m/s}^2$ (note lo pequeña que es la gravedad comparada con esta aceleración).
3. El origen se escoge en la parte inferior izquierda de la región. De acuerdo con esto, $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{h}{2} = 0,025 \text{ m}$, $v_{0x} = v$ y $v_{0y} = 0$. Las ecuaciones de movimiento son entonces (de ahora en adelante todo estará en metros, segundos y kilogramos a no ser que se especifique lo contrario):

$$x = vt \quad , \quad y = \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 = 0,025 + 92,45 \times 10^{10} t^2 \quad (1.42)$$

4. Ahora sí se resuelven las preguntas. (a) Ya se encontró en la última ecuación. (b) Primero se halla una expresión para el tiempo que le toma al protón cruzar la región. La distancia que recorre es L ; por lo tanto, la ecuación para x implica que $t = L/v$. Ahora, para que la partícula justo pase por la región y debe ser $y = h = 0,05$. (Si y es mayor choca contra la pared de arriba, si es menor la velocidad es mayor de lo que se requiere.) Si se reemplaza este tiempo en la ecuación para y , se encuentra:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{L^2}{v^2} \Rightarrow v_{min} = L \sqrt{\frac{qE}{mh}} = L \sqrt{\frac{a_y}{h}} = 297 \text{ km/s} \quad (1.43)$$

Una velocidad menor haría chocar el protón, una mayor haría que el protón pase por debajo del tope de la placa superior. (d) Con gravedad la ley de Newton en la dirección y tomaría la forma $\sum F_y = qE - mg = ma_y$. Para que siga derecho $a_y = 0$. Así $E = mg/q = 102 \text{ nN/C}$. Note el valor tan pequeño que debe tomar el campo.

1.5. Dipolos eléctricos

Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas puntuales, una de signo positivo $+q$ y otra de signo negativo $-q$, separadas a una distancia d . Note que la carga neta del sistema es nula.

Los dipolos eléctricos son objetos de estudio en la física y la química debido a su utilidad y propiedades. Una molécula polar es aquella que tiene una orientación definida debido a que los iones positivos se acumulan en un sector de la molécula, mientras que los iones negativos se acumulan en otro sector. Como resultado, existe un pequeño campo eléctrico en una molécula polar que se dirige desde la carga positiva hacia la negativa. Un ejemplo muy clásico es la molécula de agua, compuesta por dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno. Como el oxígeno tiene la tendencia a recibir los electrones del hidrógeno, la región cerca al oxígeno estará cargada negativamente y la región cerca a cada átomo de hidrógeno lo estará positivamente. Las moléculas polares entre sí se mezclan bien debido a que los campos eléctricos permiten este proceso.

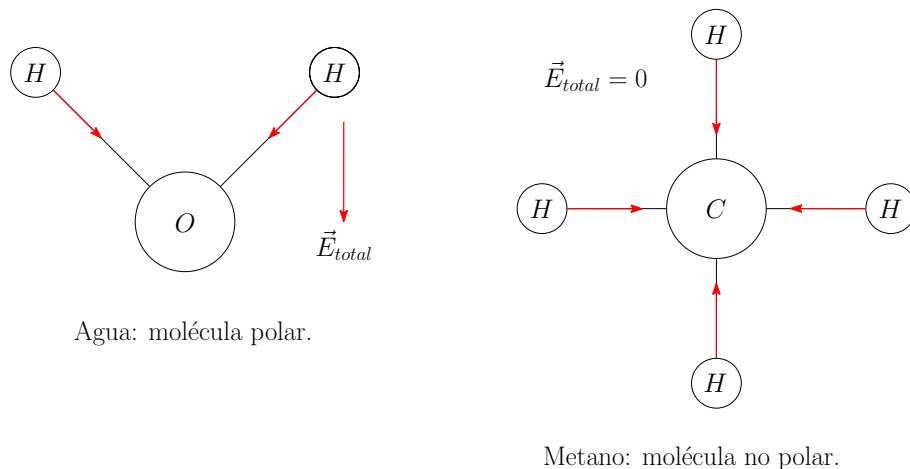


Figura 1.20. Izquierda: molécula polar del agua; derecha: molécula no polar de metano

Por otro lado, también existen moléculas no polares, como el metano, en las que el campo eléctrico dentro de la molécula no posee una orientación definida. Debido

a esta propiedad, este tipo de moléculas poco reaccionan a los campos eléctricos externos. Mientras que las moléculas no polares se mezclan bien entre sí, estas no se combinan con las polares, debido a que las no polares no reaccionan al campo eléctrico generado por las polares.

La motivación ahora es estudiar el comportamiento del dipolo eléctrico, cuando está en presencia de un campo eléctrico constante. Por simplicidad, se estudiará la orientación mostrada en el sistema descrito por la figura 1.21.

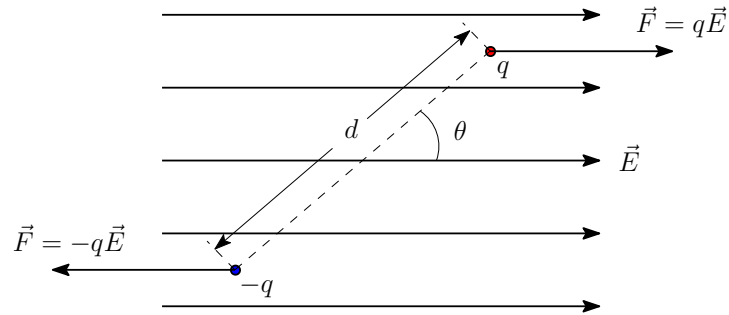


Figura 1.21. Dipolo eléctrico

Primero se analizará la fuerza total del sistema utilizando la segunda ley de Newton. Note que el campo genera una fuerza positiva (hacia la derecha) sobre la carga positiva. Esta fuerza es $\vec{F}_+ = qE \hat{i}$. Por otro lado, la fuerza sobre la carga negativa es opuesta (hacia la izquierda) y se puede escribir como $\vec{F}_- = -qE \hat{j}$. Es claro ahora que la fuerza neta es $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$. Esto quiere decir que el dipolo permanece en equilibrio traslacional y, si inicialmente estaba en reposo, este no se desplazará con respecto a su posición inicial.

Sin embargo, esto no quiere decir que el dipolo esté en equilibrio total, ya que existiría la posibilidad de que el movimiento de torsión (torque) no sea nulo. Para calcular el torque del sistema, se debe recordar que este está dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, donde el vector \vec{r} es el vector posición que se dirige desde el pivote (punto respecto al cual se calcula el torque) hacia el punto donde se aplica la fuerza. Se escogerá el centro de masa del sistema como el pivote.

Se comenzará calculando el torque sobre la partícula positiva, $\vec{\tau}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+$. Ya se calculó \vec{F}_+ anteriormente; para calcular \vec{r}_+ note que la distancia del pivote hacia la carga es $d/2$. Utilizando el ángulo θ indicado se concluye que $\vec{r}_+ = \frac{d}{2}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$. Para calcular el torque hay dos formas: la primera es usando la componente perpendicular de \vec{r}_+ a la fuerza, esta es la componente en la dirección \hat{j} . La magnitud del torque es el producto de esta componente por la fuerza, la cual es $|\vec{\tau}_+| = \frac{d}{2}qE \sin \theta$. Para calcular la dirección se utiliza la regla de la mano derecha usando las direcciones de estos dos vectores, primero el de \vec{r}_+ en \hat{j} “↑” y el segundo el de la fuerza “→”.

Curvando la mano, se observa que la dirección es horaria “ \curvearrowright ” o $-\hat{k}$. La otra forma sería calculando directamente el producto cruz:

$$\vec{\tau}_+ = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{2} \cos \theta & \frac{d}{2} \sin \theta & 0 \\ qE & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{d}{2} qE \sin \theta \hat{k} \quad (1.44)$$

El cálculo de $\vec{\tau}_- = \vec{r}_- \times \vec{F}_-$ es similar. Como $\vec{r}_- = -\frac{d}{2}(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ y $\vec{F}_- = -qE \hat{i}$, se deja al lector comprobar que $\vec{\tau}_- = \vec{\tau}_+ = -\frac{d}{2} qE \sin \theta \hat{k}$. El torque total es entonces $\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = -qdE \sin \theta$. Si se define la magnitud de un vector que se llamará \vec{p} de la forma $|\vec{p}| = qd$, se concluye que $|\vec{\tau}| = |\vec{p}||\vec{E}| \sin \theta$. Esto se puede relacionar con el producto cruz ya que la magnitud del producto cruz de dos vectores es $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta$. Se termina concluyendo que:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.45)$$

El vector \vec{p} se conoce como el momento dipolar eléctrico y se define como $\vec{p} = q\vec{d}$, donde q es la carga de cada carga del dipolo y \vec{d} es el vector que va desde la carga negativa hacia la carga positiva.

En términos del mismo vector, se puede expresar la energía potencial del dipolo. Aunque el tema de energía potencial eléctrica se introducirá más adelante, se puede aprovechar este momento para introducir esta cantidad. La energía potencial de un dipolo eléctrico, en presencia de un campo eléctrico (constante) externo, es:

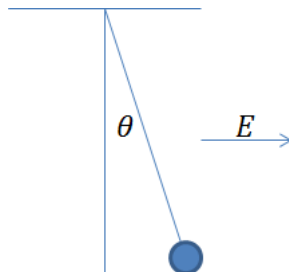
$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.46)$$

1.6. Ejercicios

1. Dos cargas eléctricas de cargas q_1 y q_2 están separadas por una distancia d a lo largo del eje x (q_1 está a la izquierda de q_2). Se desea colocar una tercera carga sobre el eje x de tal forma que esta no sienta fuerza alguna. Calcular la distancia (con respecto a la carga q_1 y en términos de q_1 , q_2 y d) a la que se debe colocar la tercera carga para que esto suceda si (a) ambas cargas son positivas, (b) ambas cargas son negativas, (c) q_1 es positiva y q_2 es negativa, (d) q_1 es negativa y q_2 es positiva.
2. Suponga que tres electrones forman un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 nm y 4 nm (cada electrón se ubica en un vértice). (a) Hallar la fuerza eléctrica que siente el electrón ubicado en el vértice que une los dos catetos, (b) calcular el campo eléctrico en la parte media de la hipotenusa, (c) calcular la

aceleración que sentiría una carga de 5 pC y masa 10^{-15} g ubicada en la parte media de la hipotenusa.

3. Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas con la misma magnitud de carga pero signo opuesto separadas una distancia d . Suponga que un dipolo eléctrico es formado por cargas $-q$ y $+q$, la primera ubicada en el punto $(0, -\frac{d}{2}, 0)$ y la segunda ubicada en el punto $(0, \frac{d}{2}, 0)$. (a) Encontrar una expresión para el campo eléctrico a lo largo del eje y ; tenga en cuenta los casos $y < -\frac{d}{2}$, $-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$ y $y > \frac{d}{2}$. (b) Encontrar una expresión para el campo eléctrico a lo largo del eje x ; tenga en cuenta acá los casos $x < 0$ y $x > 0$. (c) Encontrar el campo eléctrico a lo largo de la línea $y = x$; de nuevo, considerar los casos $x < 0$ y $x > 0$.
4. Suponga que las cargas $-2q$ y $+q$ del cuadrado del ejemplo 1 de la sección 1.3.2 son $-5q$ y $+3q$, respectivamente. Encontrar de nuevo el campo para esta nueva configuración en (a) el centro del cuadrado y (b) la parte media de la base inferior.
5. Hacer de nuevo el ejercicio del hexágono del ejemplo 2 de la sección 1.3.2 si $q_1 = +2Q$, $q_2 = -2Q$, $q_3 = +Q$, $q_4 = 3 + Q$, $q_5 = -Q$ y $q_6 = -Q$.
6. Una pequeña pelota de plástico de $m = 2,00$ g se encuentra suspendida de un hilo de $l = 20,0$ cm de longitud en presencia de un campo eléctrico uniforme horizontal de magnitud $E = 10^3$ N/C. Si la pelota forma un ángulo de $\theta = 15^\circ$ con la vertical, hallar la carga neta de la pelota.



7. Dos placas metálicas horizontales de área $A = 400 \text{ mm}^2$ están separadas por una distancia $d = 10 \text{ mm}$, una de ellas sobre la otra. Se cargan con cargas de igual magnitud y signos opuestos (negativa la de abajo y positiva la de arriba), generando un campo de magnitud $|E| = 2500 \text{ N/C}$ entre las placas. Una partícula de masa $m = 2,00 \times 10^{-16} \text{ kg}$ y carga $q = 1 \mu\text{C}$ parte del centro de la placa inferior con rapidez de $v = 1,00 \times 10^5 \text{ m/s}$ formando un ángulo

- de $\theta = 37^\circ$ con la horizontal. (a) Describir la trayectoria de la partícula y especificar el sitio donde choca. (b) Hallar la mínima rapidez inicial que debe tener la carga (moviéndose en la misma dirección) para no chocar contra las placas.
8. Un electrón se encuentra inicialmente en reposo. Hallar la magnitud del campo eléctrico que hace que el electrón alcance la mitad de la velocidad de la luz en un tiempo de $3\mu\text{s}$. Suponga que una vez el electrón alcanza esta velocidad, la magnitud del campo se duplica súbitamente. (b) Si se quiere frenar el electrón, ¿la dirección del campo debe ser la misma o se debe invertir? Explique su respuesta. (c) Encontrar el tiempo que le tomaría frenar al electrón una vez se duplica la magnitud del campo.
 9. Suponga que una barra de longitud 20 cm se ubica a lo largo del eje y , donde el centro de la barra está localizado en el origen coordenado. La densidad lineal de carga no es constante y toma la forma $\lambda = Cy^4$. Hallar el valor de C si la carga total de la barra es 3 mC.
 10. Suponga que el disco del ejemplo 2 de la sección 1.3.4 posee un hueco concéntrico de radio $R/2$. Solucionar de nuevo los puntos (a) y (b) de este ejemplo bajo esta nueva condición.
 11. Encontrar el campo eléctrico generado por un anillo (disco infinitamente delgado) de radio R y carga total Q con densidad lineal uniforme a lo largo del eje z . Nota: el disco está centrado en el origen sobre el plano xy .
 12. Una barra de longitud 4 m y carga total $-6\mu\text{C}$ está centrada en el origen y se localiza a lo largo del eje x . La carga se distribuye de manera uniforme. Encontrar el campo eléctrico en los puntos con coordenadas (a) (0,5,0) m, (b) (0,-2,0) m y (c) (6,0,0) m.
 13. Suponga que dos barras de la misma longitud y la misma carga se organizan de tal manera que dos de sus extremos forman el vértice de un triángulo rectángulo. Hallar el campo eléctrico en el punto medio entre los dos extremos libres de las barras. Asuma que la carga de cada barra es 2 nC y la longitud de cada una de ellas es 50 cm.
 14. Una barra posee una densidad lineal no uniforme de la forma $\lambda = Cx$, donde C es una constante positiva conocida. La barra se ubica a lo largo del eje x con un extremo en el origen y el otro en el punto $(L, 0)$. Hallar el campo eléctrico en los siguientes puntos (a) $(-L, 0)$, (b) $(2L, 0)$ y (c) $(3L, 0)$. Nota: las respuestas deben quedar en términos de C , L y k .

LEY DE GAUSS

2.1. El flujo eléctrico y la ley de Gauss

Hasta ahora se ha enfocado el esfuerzo del estudio de la electrostática en describir campos electromagnéticos a partir de configuraciones de cargas dadas. En esta sección se plantea el problema en dirección contraria, ¿Qué podemos saber de la configuración de carga si conocemos solo el campo eléctrico que genera? Para solucionar esta pregunta, se estudiará la Ley de Gauss, herramienta que permite simplificar algunos cálculos de campos eléctricos y además comprender cómo se distribuye la carga eléctrica en cuerpos conductores y aislantes.

2.1.1. Flujo eléctrico

Para comprender la idea de flujo eléctrico, se puede aprovechar la analogía entre el campo eléctrico y el movimiento de un fluido (el campo eléctrico representaría el campo vectorial de la velocidad del fluido), donde las cargas positivas son fuentes y las negativas son sumideros. Mientras que el flujo de un fluido representa el caudal o la cantidad de agua en movimiento por unidad de tiempo que atraviesa una superficie, el flujo eléctrico representa la cantidad de las líneas de campo que atraviesan una superficie.

Para entender el flujo eléctrico, considere primero el caso más sencillo, donde un campo eléctrico constante va en la dirección normal a la superficie que atraviesa, tal como se muestra en la figura 2.1.

En este caso note que todas las líneas atraviesan la superficie de la misma manera. Como el campo eléctrico es constante, todas las flechas poseen la misma intensidad y, además, siempre forman el mismo ángulo con la normal a la superficie, $\theta = 0$. Para este caso particular el flujo eléctrico, simbolizado como Φ_E , simplemente toma la

forma $\Phi_E = EA$, donde A es el área de la superficie. Note que el flujo tiene unidades de $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$.

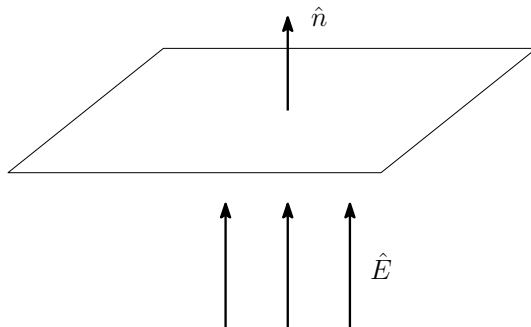


Figura 2.1. Campo eléctrico constante paralelo a la superficie

La situación cambia un poco cuando el campo eléctrico constante no va en la misma dirección de la normal a la superficie. Para esto se debe ser más cuidadoso porque el área posee una dirección. La dirección viene dada por un vector unitario \hat{n} , el cual es perpendicular a la superficie (esto se conoce como la dirección normal a la superficie). El vector área se puede entonces escribir como:

$$\vec{A} = A\hat{n} \quad (2.1)$$

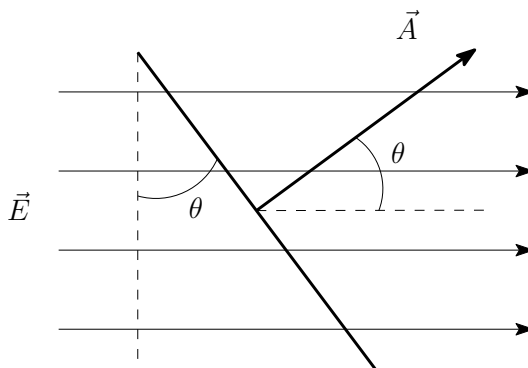


Figura 2.2. Superficie de área A formando un ángulo de θ respecto a un campo eléctrico uniforme

Note de la figura 2.2 que el campo eléctrico y la superficie forman un ángulo θ . Cuando esto sucede, el flujo se debilita un poco ya que el campo no atraviesa la superficie de manera directa. Esto también sucede con el sol y la tierra: al medio día los rayos de luz del sol caen perpendicularmente (de manera directa o normal) a

la superficie, generando una mayor intensidad en la radiación, pero en la tarde la radiación se reduce porque los rayos del sol caen oblicuamente. Cuando el campo eléctrico y el área de la superficie forman un ángulo θ , el flujo viene dado por:

$$\Phi_E = EA \cos \theta \quad (2.2)$$

O, en forma vectorial:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (2.3)$$

El siguiente paso para tener una definición general del flujo es considerar un campo eléctrico que no sea constante y/o una superficie que no sea uniforme, de tal manera que la intensidad del campo punto a punto no sea constante, así como el ángulo formado por este y la superficie atravesada. En este caso se debe hacer una integración para tener en cuenta todas las contribuciones infinitesimales (pedazo por pedazo). La definición del flujo así toma la forma:

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (2.4)$$

donde dA es un elemento infinitesimal de área con dirección \hat{n} .

2.1.2. Ley de Gauss

Hasta el momento se ha definido el concepto de flujo a través de superficies abiertas; esto es, superficies donde no es posible definir una región externa y una interna. Por ejemplo, un disco es una superficie abierta porque no encierra nada.

La ley de Gauss estudia superficies cerradas, en las cuales sí se puede distinguir una superficie interna y una externa. Esta ley postula una relación entre el flujo eléctrico en una superficie cerrada y la carga que encierra dicha superficie. Un cilindro (las dos tapas más la envoltura) es una superficie cerrada, por ejemplo, siempre y cuando no tenga agujeros.

Suponga que tiene una superficie cerrada y que existe un campo eléctrico generado por cargas externas (por fuera de la región cerrada), tal como se muestra en la figura 2.3. Note que cuando esto sucede, siempre y cuando las cargas estén ubicadas fuera de la superficie, todas las líneas que entran a esta terminan saliendo por algún otro lado.

Esta propiedad se puede formular de otra manera: todo el flujo entrante es igual al flujo saliente. Note que en la Ec. (2.4) no se definió una convención de signos para el flujo sobre una superficie abierta. No obstante, cuando se estudia una superficie cerrada, se define el flujo negativo cuando entra a la superficie y positivo cuando sale de la superficie. Como el flujo saliente es igual (en magnitud) al entrante en

una superficie cerrada (siempre y cuando las cargas que generan el campo estén por fuera), pero difieren de signo, se concluye que el flujo total sobre la región es:

$$\Phi_E^{tot} = \Phi_E^{ent} + \Phi_E^{sal} = 0$$

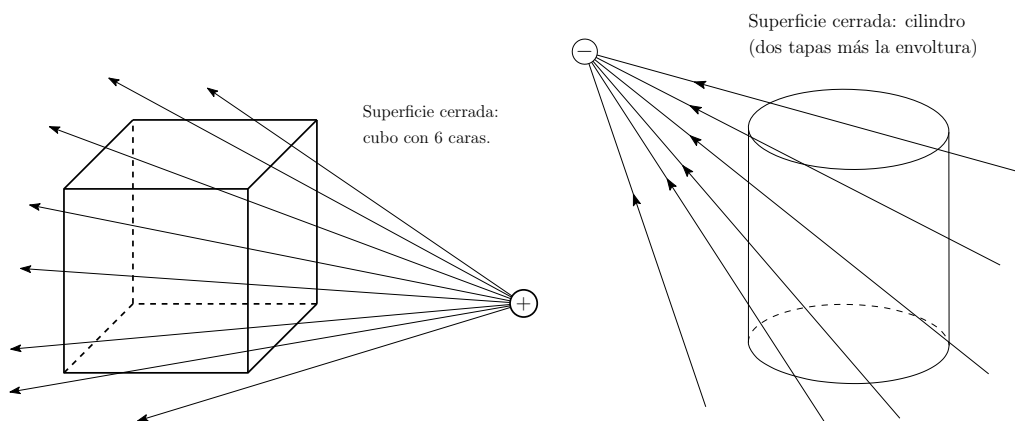


Figura 2.3. Flujo a lo largo de dos superficies cerradas correspondientes a campos eléctricos generados por cargas externas

Este es un resultado general que se puede enunciar de la siguiente manera: si una superficie cerrada no encierra cargas eléctricas, el flujo eléctrico a través de la superficie es cero.

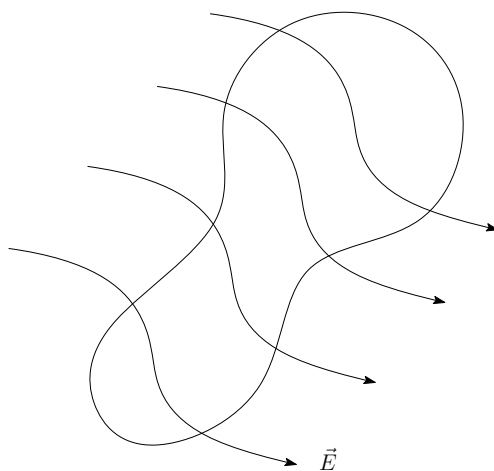
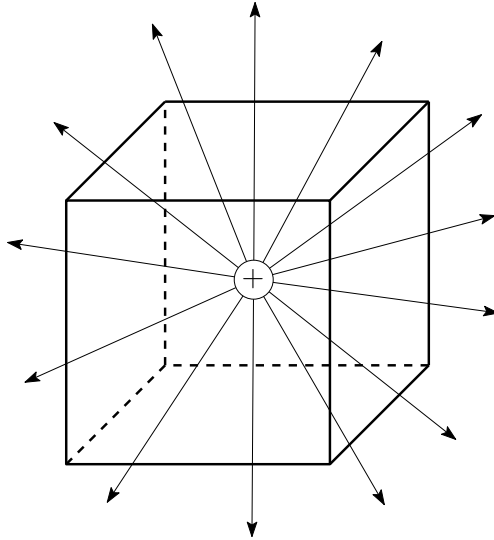


Figura 2.4. Superficie cerrada sin carga interna en presencia de campo eléctrico externo; el flujo neto también es cero

No obstante, el resultado cambia de manera significativa si las cargas que generan el campo eléctrico yacen dentro de la superficie. En particular, debido a que las líneas de campo de una carga positiva salen de esta, el flujo a lo largo de una superficie cerrada siempre será positivo cuando una carga positiva es encerrada. Lo opuesto sucede cuando una carga negativa es encerrada, ya que el flujo generado sería negativo (figura 2.5).

Si se encierra una carga positiva
el flujo siempre sale.



Si se encierra una carga negativa
el flujo siempre entra.

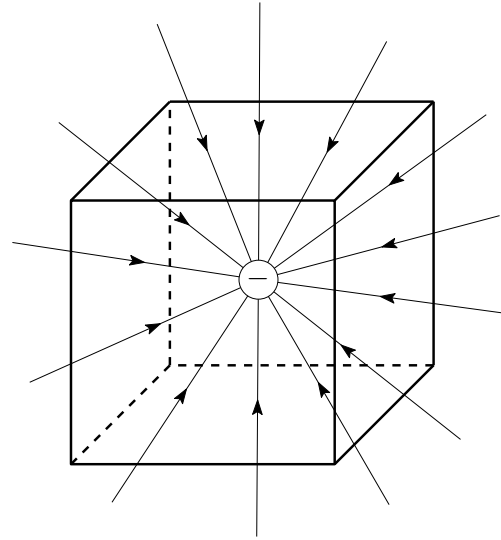


Figura 2.5. Flujo a lo largo de dos superficies cerradas correspondientes a campos eléctricos generados por cargas internas

Para calcular el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con carga encerrada Q , se pueden considerar varias superficies esféricas de distintos radios, todas centradas en el origen. Es fácil darse cuenta de que la cantidad de líneas de campo que atraviesan las dos superficies es la misma (figura 2.6). Por lo tanto, el flujo eléctrico sobre todas las superficies es el mismo. Como el campo generado por la carga puntual satisface la ley de Coulomb, es fácil darse cuenta de que la magnitud del campo sobre todos los puntos de una esfera de radio r es $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Note que el área atravesada es justo el área de la esfera, cuya magnitud es $A = 4\pi r^2$. Adicionalmente, tanto el campo como la superficie poseen dirección radial, así que el ángulo que estos dos vectores forman es $\theta = 0^\circ$ (figura 2.6). Usando estos resultados se puede concluir que:

$$\Phi_E = \oint E \cos \theta dA = E \oint dA = EA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 \quad (2.5)$$

Simplificando la Ec. (2.5), se obtiene la ley de Gauss, que indica que para cualquier superficie cerrada el flujo sobre esta será igual a la carga encerrada sobre ϵ_0 :

$$\Phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} . \quad (2.6)$$

Otra forma útil de expresar la ley de Gauss:

$$\oint E \cos \theta dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

Esferas de radio variable r .

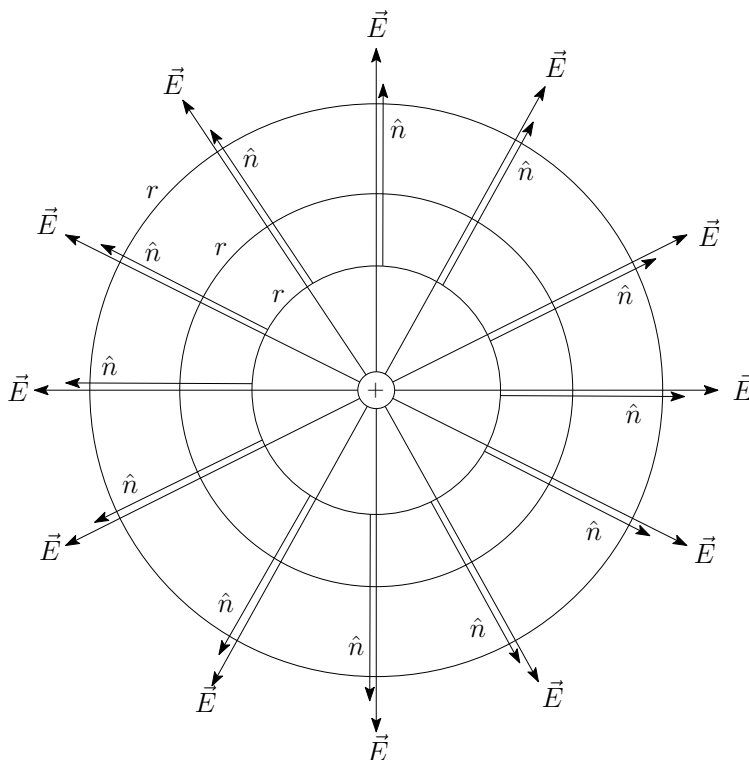


Figura 2.6. Flujo a lo largo de varias esferas concéntricas de distintos radios; el campo es generado por una carga positiva en el centro

Esta relación resuelve la pregunta planteada al inicio del capítulo: al conocer el campo eléctrico generado por una distribución de carga se puede conocer la cantidad de carga encerrada en cualquier superficie calculando el flujo eléctrico a través de esta. Hay algunas cosas importantes que aclarar con respecto a la ley de Gauss:

1. Esta solamente se aplica a superficies cerradas, por eso la integral posee un pequeño círculo que hace alusión a esta propiedad.
2. No existe un equivalente a la ley de Gauss cuando la superficie es abierta.
3. Las cargas que contribuyen al flujo sobre una superficie cerrada son únicamente las que yacen adentro; las que están por fuera no contribuyen.
4. Q_{enc} denota la carga neta encerrada. Para encontrarla se hace un conteo de la carga total teniendo en cuenta los signos de las cargas. Si, por ejemplo, la superficie encierra 4 cargas positivas de valor $+Q$ y 7 cargas negativas de valor $-Q$, se concluye que $Q_{enc} = -3Q$.
5. La ley de Gauss tiene en cuenta los signos de las cargas. Si $Q_{enc} > 0$, el flujo es positivo. Si $Q_{enc} < 0$, el flujo es negativo.
6. Aunque la ley de Gauss se probó con esferas, el resultado se puede reproducir usando cualquier superficie cerrada.

2.2. Distribución de carga en conductores y aislantes

En la sección 1.1.2 se introdujo brevemente el concepto de conductores y aislantes. Estas dos clases de materiales tienen un tratamiento muy diferente a partir de la ley de Gauss; por eso, vale la pena discutir de nuevo su comportamiento y cómo su carga se distribuye a lo largo de cada material.

Es importante recordar que en un conductor las cargas se pueden mover con mucha facilidad a lo largo del material debido a que algunos de los electrones que lo componen no están muy bien aferrados a sus núcleos. Suponga que en un conductor se acumula cierta carga en su interior, positiva, por ejemplo. Si esta carga tiene un valor $+Q$, una carga negativa de valor $-Q$ se sentirá atraída hacia ella. La clave está en que, como las cargas en un conductor se mueven libremente, estas cargas negativas podrán moverse hacia las positivas cancelando su efecto. Consecuentemente, la carga neta existente será $+Q - Q = 0$, o $Q_{enc} = 0$. Las cargas negativas que se han movido atraerán a su vez cargas positivas, las cuales atraerán a su vez cargas negativas, y así sucesivamente. Siempre y cuando el material sea inicialmente neutro, este proceso de cancelación siempre ocurrirá.

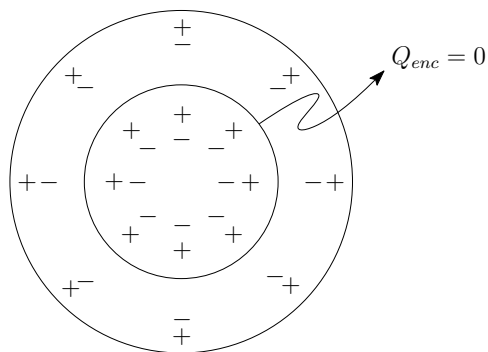
La principal consecuencia de este fenómeno es que dentro de un conductor (por ahora neutro) la carga encerrada siempre es cero. Si la carga encerrada es cero, se puede concluir por la ley de Gauss, Ec (2.7), que dentro de un conductor el flujo es nulo y así también el campo eléctrico.

¿Qué sucede si el conductor no es eléctricamente neutro? Siguiendo con la explicación donde se tenía una carga inicial $+Q$ dentro del conductor, la cual atraía a su

vez una negativa $-Q$ y así sucesivamente, se puede concluir que en algún momento este proceso de cancelación (a veces denominado apantallamiento) debe terminar. La razón es simple: si el conductor tiene una carga neta positiva, hay un exceso de carga positiva que no encontrará compañeras del signo opuesto a las cuales pueda atraer (estas ya fueron atraídas por otras). Algo similar sucede si el exceso de carga es negativa, en la cual quedan cargas negativas sin nadie a quién atraer. Si la carga inicial del conductor es $+Q$ (o $-Q$), ¿qué sucede entonces con esta carga? ¿Dónde se acumula? La respuesta es en los bordes (o superficie) del material; este sería el único lugar donde no queda nadie más para atraer. Note que como el exceso de carga se acumula en la superficie, la carga neta dentro del conductor sigue siendo nula (no por fuera, sin embargo). Estos resultados se pueden resumir de la siguiente manera:

- Como la carga encerrada dentro de un conductor es cero, el campo eléctrico dentro de un conductor siempre es cero.
- Cualquier exceso de carga en un conductor siempre se acumula en la superficie (en los bordes).

CONDUCTOR NEUTRO



CONDUCTOR CON EXCESO DE CARGA POSITIVA

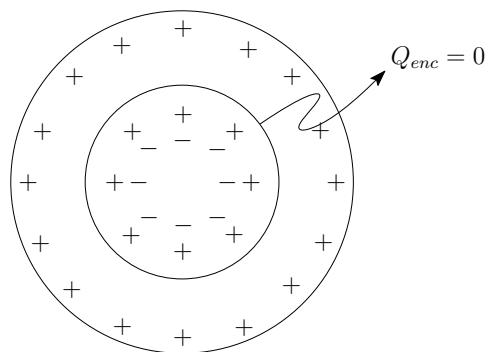


Figura 2.7. Izquierda: redistribución de la carga en un conductor neutro. Derecha: la misma situación en un conductor con exceso de carga positiva, la cual se almacena en la superficie (en ambos casos la carga encerrada es nula en la región interna)

Note que por ahora no se puede concluir nada sobre el campo eléctrico fuera de un conductor; esto se estudiará en detalle más adelante.

¿Qué sucede cuando el material es aislante o no es conductor? En este caso las cargas no serán libres de moverse y, por lo tanto, el proceso de cancelación no ocurrirá. Si un aislante es eléctricamente neutro, la carga encerrada también podría ser cero dependiendo de como esté distribuida. Sin embargo, si un aislante posee un exceso de

carga (no es eléctricamente neutro), la carga permanecerá justo donde inicialmente estaba ubicada y no se acumulará en la superficie, como sí sucedía en el conductor. Como resultado se puede concluir que:

- Si un aislante posee un exceso de carga, la carga encerrada dentro de este no será cero.
- El campo eléctrico dentro de un aislante cargado no es cero, aunque podría anularse en algunas regiones dependiendo de cómo la carga esté distribuida.

2.3. Ley de Gauss para calcular campos eléctricos

La Ley de Gauss es una herramienta práctica en el cálculo de campos eléctricos generados por distribuciones de carga con muy alta simetría. A pesar de que al principio el interés era calcular el flujo a partir del campo y la superficie, ahora la motivación es calcular el campo a través de la distribución de carga que genera el flujo. A continuación se muestran unos pasos que son útiles para este propósito:

1. Haga un dibujo en caso de ser necesario. Una vez identificada la distribución que genera el flujo, determine la o las regiones donde se debe calcular el campo.
2. Elegir una superficie cerrada imaginaria (superficie gaussiana) que simplifique la expresión de la ley de Gauss, Ec. (2.7). La superficie debe pasar por el punto donde se va a calcular el campo y debe cumplir las siguientes condiciones:
 - a) El vector de área y el campo eléctrico deben ser paralelos o perpendiculares en todos los puntos de la superficie, así $\cos\theta = 1$ o $\cos\theta = 0$.
 - b) El campo debe tener la misma magnitud sobre todos los puntos de la superficie. No se preocupe: la mayoría de superficies que se usan son esferas y cilindros.
3. Si la superficie escogida es la correcta, el campo eléctrico debe ser constante a lo largo de esta. Esto implica que el campo eléctrico se puede sacar de la integral en la Ec. (2.7). Lo único que queda por evaluar es $\oint dA$, pero esta integral es simplemente A . Hay que tener en cuenta que esta área es únicamente aquella que contribuye al flujo, en otras palabras, el área atravesada por las líneas de campo. El área A de la superficie se calcula en términos de las coordenadas del punto donde el campo desea ser calculado.
4. Calcular la carga encerrada en cada región. En muchos casos hay que distinguir las regiones internas y externas de los objetos que generan el campo, pues la carga encerrada puede diferir. Si el objeto es conductor, la carga encerrada dentro de este es nula. En el caso de cuerpos aislantes cargados, la carga

encerrada es igual a la densidad de carga del cuerpo, por el volumen del cuerpo encerrado dentro de la superficie gaussiana.

5. Reemplazar en la ley de Gauss y despejar el campo eléctrico en cada región.

2.3.1. Ejemplos

Ejemplo 1. Una esfera aislante de radio a tiene una carga total Q distribuida de manera uniforme en todo su volumen. Calcule el campo eléctrico a una distancia r del centro de la esfera.

Solución

Se desarrollan de nuevo los pasos sugeridos:

1. Se distinguen puntos fuera y dentro de la esfera.
2. Para esto la superficie gaussiana que aprovecha la simetría radial de la distribución de carga es la esfera, ya que el ángulo entre el vector de área y el campo eléctrico siempre es cero y además el campo tiene el mismo valor sobre toda la superficie.
3. Note de la figura 2.8 que las líneas de campo atraviesan toda la superficie de la esfera, tanto adentro ($r < a$) como afuera ($r > a$), siendo a el radio de la esfera y r la variable que indica la posición al centro del sistema coordenado. El área de la esfera gaussiana es entonces $A = 4\pi r^2$. Ojo: no confundir con el área del objeto, $4\pi a^2$, ni con el área de un disco, πr^2 .
4. Cuando $r > a$ es claro que toda la carga de la esfera es encerrada, ya que nada queda por fuera, así $Q_{enc} = Q$.

Para $r < a$, no obstante, no sucede lo mismo. De la figura 2.8 se puede concluir que la carga que queda por dentro de la superficie gaussiana es únicamente una parte (otra parte de la carga queda por fuera). Entre mayor sea el valor de r , más carga se encierra. Recuerde que esta carga está distribuida a lo largo del volumen de la esfera; para calcular la carga que queda adentro de la superficie gaussiana es conveniente entonces definir una densidad volumétrica de carga. Como la carga está distribuida de manera uniforme, la densidad de carga es igual a la carga total dividida por el volumen de la esfera:

$$\rho = \frac{Q}{V_{esfera}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (2.8)$$

La carga que queda dentro de la superficie gaussiana es por supuesto igual a la densidad de carga multiplicada por el volumen de esta superficie:

$$Q_{enc} = \rho V_{sup\ gaussiana} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{a^3} \quad (2.9)$$

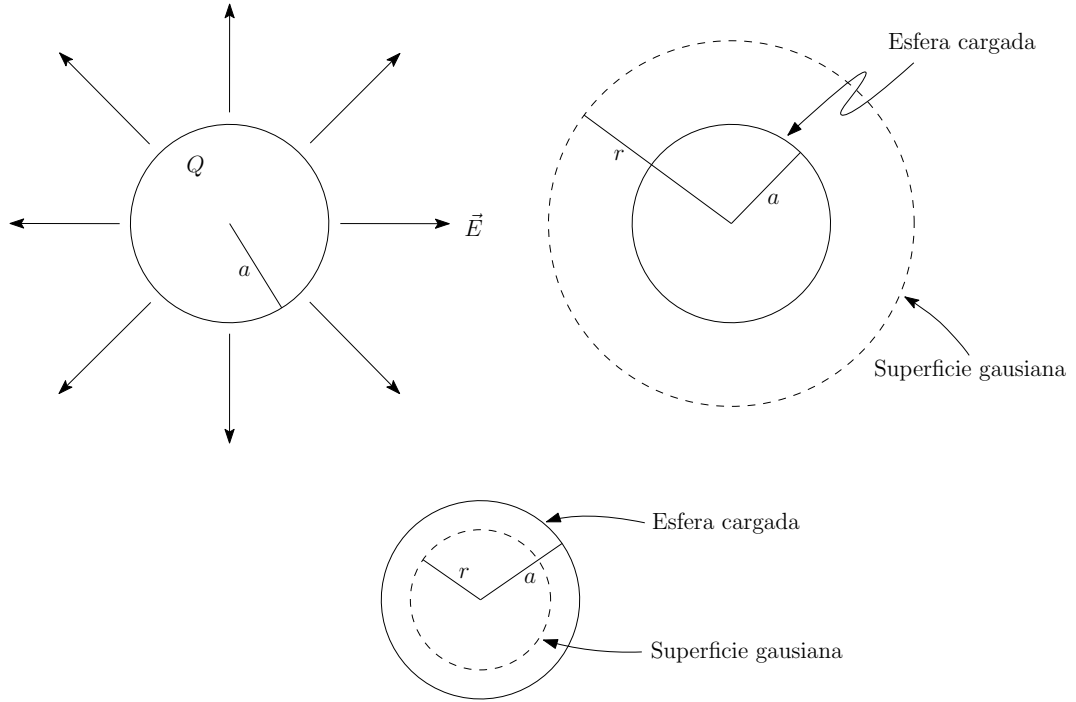


Figura 2.8. Líneas de campo de una esfera cargada

5. Se realiza el cálculo por separado para la región externa ($r > a$) e interna ($r < a$) del cuerpo cargado, remplazando en la ley de gauss, Ec. (2.7), para cada caso. De forma general:

$$\oint E \cos \theta dA = EA = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

Cuando $r > a$:

$$E_{r>a} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{r>a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.11)$$

Cuando $r < a$:

$$E_{r<a} 4\pi r^2 = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3} \Rightarrow E_{r<a} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad (2.12)$$

Del resultado se puede observar que dentro de la esfera cargada el campo eléctrico aumenta linealmente con respecto a la distancia al centro de la esfera, mientras que fuera de esta el campo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera. Se puede afirmar que fuera de la esfera el campo se comporta igual al de una carga puntual. El máximo valor del campo se obtiene en la superficie de la esfera, cuando $r = a$, o $E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$. Este comportamiento se puede visualizar en la figura 2.9.

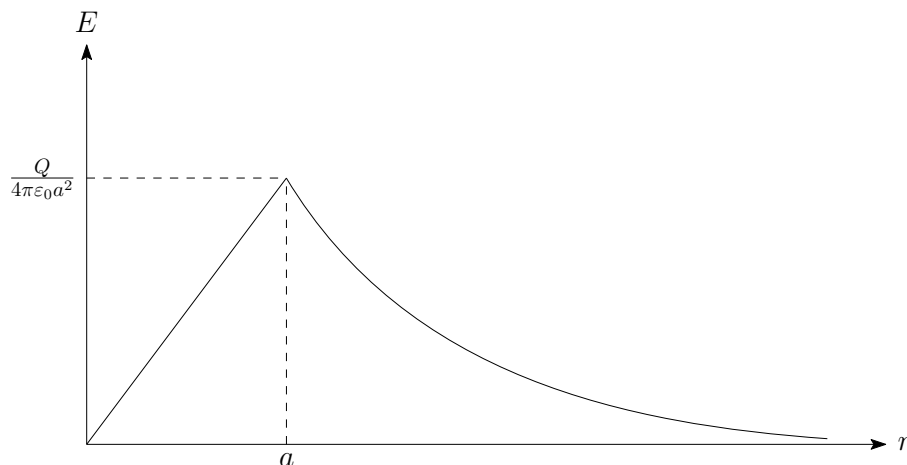


Figura 2.9. Magnitud del campo eléctrico en función de la distancia al centro para una esfera aislante

Ejemplo 2. Un conductor esférico de radio a tiene una carga de $+6Q$ y está encerrado por un caparazón conductor esférico de radio interno b y radio externo c con carga neta $-4Q$. (a) Elaborar un diagrama donde se muestre la distribución de las cargas de dicho sistema. (b) Hallar el campo eléctrico en las distintas regiones de interés. (c) Hallar la densidad superficial de carga en $r = a$, $r = b$ y $r = c$.

Solución

Antes de seguir los pasos, se debe tener en cuenta lo visto sobre conductores para deducir cómo la carga se redistribuye. Se comienza analizando el conductor interno, de radio a . Al ser conductor, toda la carga $+6Q$ debe estar en la superficie (en $r = a$).

El paso más importante es analizar lo ocurrido en el caparazón conductor. Recuerde que, por ser conductor, el campo eléctrico sobre este caparazón debe ser nulo. Este caparazón tiene una superficie interna (en $r = b$) y una externa (en $r = c$). Por lo tanto, su carga neta, de $-4Q$, debe así repartirse entre estas dos superficies, pero, ¿cómo? La clave está en recordar que el campo entre $r = b$ y $r = c$ debe anularse por

ser conductor. Así, si una superficie imaginaria (gaussiana) de forma esférica y radio r , similar a la del ejemplo anterior, se dibuja en esta región, la carga encerrada debe ser cero. La única forma en que esto puede ocurrir es si en la superficie interna, donde $r = b$, se acumula una carga de $-6Q$ que cancele la carga del conductor interno. (Esta carga se sentirá atraída por la de $+6Q$ y quedará en la superficie interna, ya que no puede escapar de ahí.) Pero, si la carga neta del caparazón es $-4Q$, y una carga de $-6Q$ se fue a la superficie interna, debe faltar una carga de $+2Q$ (porque su carga neta es $-4Q$). De esta forma, sobre la superficie externa, en $r = c$, una carga de $+2Q$ se debe acumular. Los resultados se resumen en la figura 2.10.

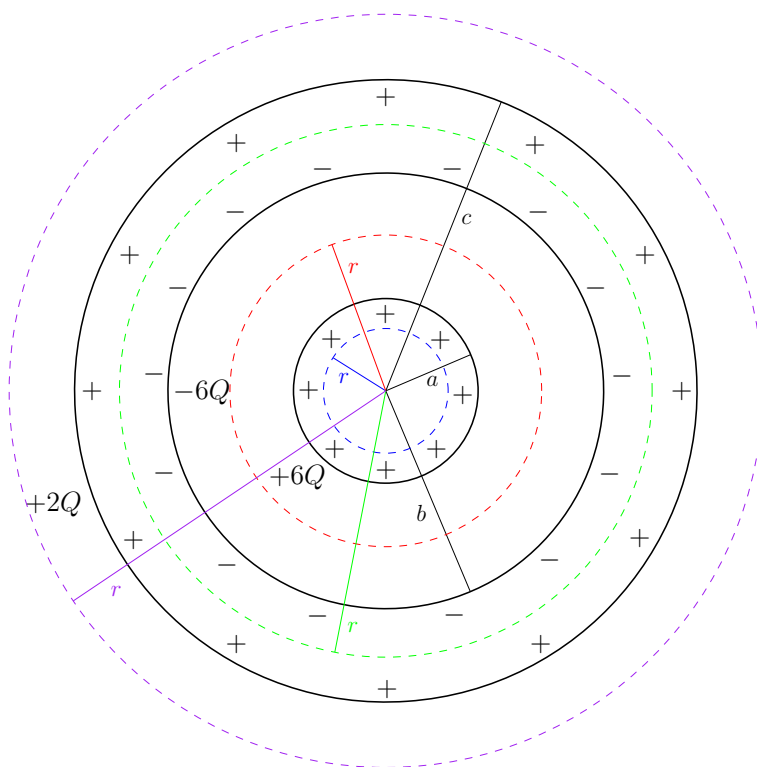


Figura 2.10. Solución ejemplo 2. Se muestra la redistribución de las cargas en los bordes de las tres superficies de radios $r = a$, $r = b$ y $r = c$. Los círculos punteados representan las superficies gaussianas en cada una de las regiones de interés; r representa el radio de estas superficies.

Una vez deducida la distribución de carga, se siguen los pasos indicados:

1. El dibujo ya se realizó. Las regiones relevantes son cuatro: i) $r < a$, ii) $a < r < b$, iii) $b < r < c$ y iv) $r > c$.

2. La superficie es una esfera de radio r centrada en el origen, tal como se muestra en la figura 2.10. Esta superficie se coloca en cada una de las cuatro regiones.
3. De nuevo, se nota que las líneas de campo atraviesan toda la superficie de la esfera. Aunque únicamente hay líneas de campo en las regiones ii y iv, ya que en las regiones i y iii el campo es cero. El área de la esfera gaussiana es entonces $A = 4\pi r^2$.
4. En la región i $Q_{enc} = 0$, en la ii $Q_{enc} = 6Q$, en la iii $Q_{enc} = 0$ y en la iv $Q_{enc} = 2Q$.
5. Se realiza el cálculo por separado para cada una de las cuatro regiones (aunque ya sabemos que en dos regiones es cero). De forma general, se tiene:

$$\oint E \cos \theta dA = EA = 4\pi r^2 E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.13)$$

Se deduce entonces que:

$$E_i = E_{iii} = 0, \quad E_{ii} = \frac{6Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_{iv} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.14)$$

Para finalizar el problema se calculan las densidades superficiales en las regiones indicadas. Observe que no tiene sentido hablar de densidades de carga por unidad de volumen porque los objetos son conductores. Lo que sí tiene sentido es hablar de densidades superficiales, ya que la carga se acumula sobre la superficie. Recordando que el área de una esfera es $A = 4\pi r^2$ y que $\sigma = Q/A$, se concluye que:

$$\begin{aligned} \sigma_{r=a} &= \left. \frac{Q}{4\pi r^2} \right|_{r=a} = \frac{6Q}{4\pi a^2} = \frac{3Q}{2\pi a^2} \\ \sigma_{r=b} &= \left. \frac{Q}{4\pi r^2} \right|_{r=b} = -\frac{6Q}{4\pi b^2} = -\frac{3Q}{2\pi b^2} \\ \sigma_{r=c} &= \left. \frac{Q}{4\pi r^2} \right|_{r=c} = \frac{2Q}{4\pi c^2} = \frac{Q}{2\pi c^2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ejemplo 3. Un cilindro aislante de radio a tiene una densidad de carga por volumen no constante dada por $\rho = Cr$, donde C es una constante y r es la distancia a partir del eje del cilindro. Calcular el campo eléctrico a una distancia r del eje del cilindro.

Solución

Los pasos se siguen de la siguiente manera:

1. De nuevo, se escogen puntos dentro del cilindro, $r < a$, y fuera de este, $r > a$.
2. La superficie gaussiana que aprovecha la simetría de la distribución de carga es un cilindro, ya que el ángulo entre el vector de área y el campo eléctrico es 0° sobre el cuerpo (envoltura) del cilindro y 90° en las tapas. Además, el campo tiene el mismo valor sobre toda la superficie del cuerpo del cilindro (envoltura) (figura 2.11).

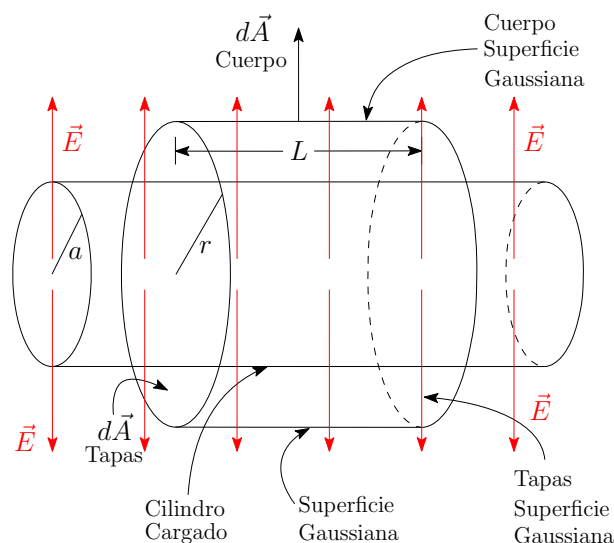


Figura 2.11. Cilindro cargado de radio a y longitud infinita con su respectiva superficie gaussiana de radio r y longitud L . Las flechas rojas denotan las líneas de campo, con dirección radial.

3. El área total de la superficie gaussiana en forma cilíndrica es la de la envoltura ($2\pi rL$) más la de las dos tapas ($2 \times \pi r^2$). Recuerde, como se muestra en la figura 2.11, que r es la distancia al eje del cilindro y L es la longitud de este. No obstante, el área que nos interesa es únicamente la de la envoltura $A = 2\pi rL$, la de las dos tapas se ignora porque las líneas de campo no atraviesan las tapas. Note que esto se justifica por el hecho de que $\cos \theta = 1$ en la envoltura y $\cos \theta = 0$ en las tapas.

4. Antes de calcular la carga encerrada en cada región note que, como el campo eléctrico es constante a lo largo de la envoltura del cilindro, se tiene que:

$$\oint E \cos \theta dA = EA = 2\pi rLE = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

El interés ahora es encontrar la carga encerrada en cada región. Recuerde que la densidad de carga volumétrica se define como $\rho = \frac{dq}{dV}$, así $dq = \rho dV$ o $Q_{enc} = \int \rho dV$. Cuando la densidad es constante $Q_{enc} = \rho V_{sup\ gaussian}$. Sin embargo, cuando la densidad no es constante, esta no se puede sacar de la integral y se debe realizar la integral correspondiente. Recuerde que para un cilindro $dV = r dr d\theta dz$. Si la superficie gaussiana está por fuera, se encierra la carga de todo el cilindro y, por lo tanto, los límites de integración son $0 \leq r \leq a$, mientras que $0 \leq z \leq L$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La carga encerrada, para $r > a$, es así:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho dV = \int C r dV \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^L C r^2 dz d\theta dr = C \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \\ &= C \frac{a^3}{3} 2\pi L \end{aligned} \quad (2.17)$$

Cuando $r < a$ el cálculo es similar. No obstante, la integral radial ya no es entre 0 y a , sino entre 0 y r . La razón es que solamente nos interesa la carga encerrada, y en este caso la carga encerrada es únicamente la que yace dentro de la superficie gaussiana. Entonces:

$$\begin{aligned} Q_{enc} &= \int \rho dV = \int C r dV \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L C r^2 dz d\theta dr = C \int_0^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \\ &= C \frac{r^3}{3} 2\pi L \end{aligned} \quad (2.18)$$

5. Lo único que falta es juntar todos los resultados. Usando la Ec. (2.16) para despejar E y los resultados para la carga encerrada, se concluye:

$$E_{r>a} = \frac{Q_{enc}}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{2\pi \cancel{L} C R^3}{3 \times 2\pi r \cancel{L} \epsilon_0} = \frac{C R^3}{3r \epsilon_0}$$

$$E_{r>a} = \frac{Q_{enc}}{2\pi r L \epsilon_0} = \frac{2\pi \cancel{L} C r^3}{3 \times 2\pi r \cancel{L} \epsilon_0} = \frac{C r^2}{3\epsilon_0} \quad (2.19)$$

Ejemplo 4. Una lámina infinita tiene una densidad de carga por unidad de área σ . Calcule el campo eléctrico a una distancia d de la lámina.

Solución

1. Como se muestra en la figura 2.12, el campo se puede calcular a la derecha de la placa y también a la izquierda.

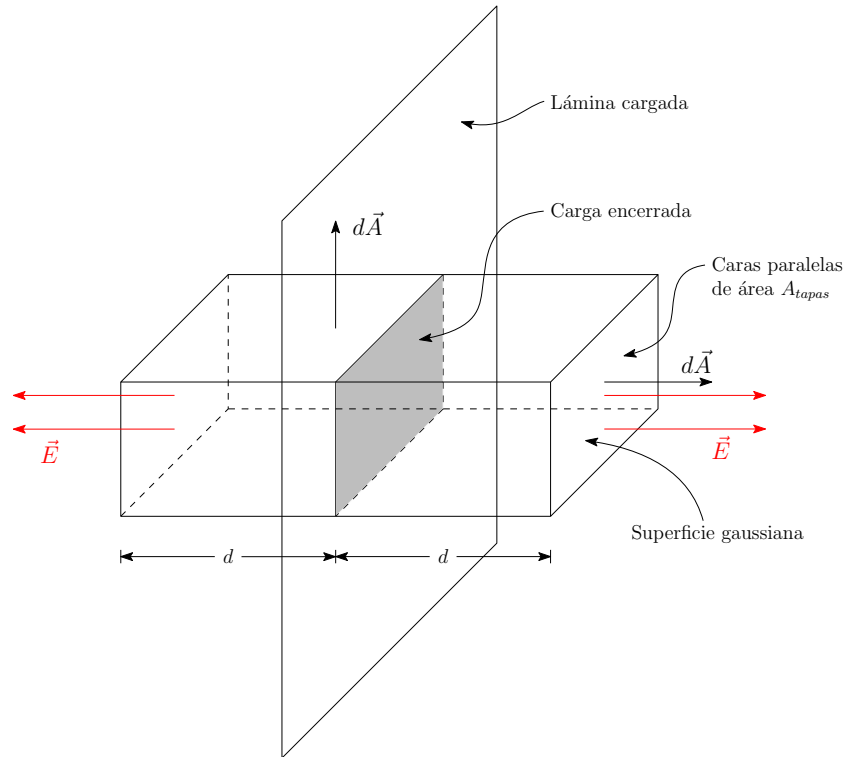


Figura 2.12. Lámina cargada infinita con su superficie gaussiana. Las líneas rojas indican la dirección del campo eléctrico, d es la distancia del centro del sistema a las tapas.

2. La superficie gaussiana que aprovecha la simetría de la distribución de carga es cualquier paralelepípedo que tenga dos de sus caras paralelas a la lámina cargada, de tal forma que el resto de sus caras sean perpendiculares a esta. El ángulo entre el vector de área de las caras paralelas a la lámina y el vector de campo eléctrico es 0° , y el ángulo entre el vector de área del resto de sus caras y el vector de campo eléctrico es 90° .
3. El campo eléctrico es constante a lo largo de las caras izquierda y derecha del paralelepípedo. Note que solamente el área de las tapas derecha e izquierda es atravesada por las líneas de campo, así $A_{total} = 2 \times A_{tapas}$. Las otras cuatro caras no se tienen en cuenta para el cálculo del flujo. Así $A = 2A_{tapas}$. Observe que para este sistema el área no depende de d .
4. La carga encerrada está dada por toda la carga mostrada a lo largo de la región gris de la figura 2.12 (esta es la que queda dentro del paralelepípedo). Esta área se calcula de la siguiente manera:

$$Q_{enc} = \sigma A_{tapas} \quad (2.20)$$

5. Juntando los resultados vemos que:

$$\oint E \cos \theta dA = \oint EA = 2EA_{tapas} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A_{tapas}}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

Despejando E se concluye que:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2.22)$$

Una particularidad sobre este resultado es que no depende de la distancia d . El campo eléctrico es así uniforme. Sin embargo, tenga en cuenta que se calculó la magnitud. En la región izquierda el campo tiene dirección $-\hat{i}$ y en la derecha \hat{i} . Esto se deduce por la dirección de las líneas de campo.

2.4. Ejercicios

1. Un disco de radio 20 cm está orientado con su vector unitario formando un ángulo de 30° respecto a un campo eléctrico uniforme de magnitud de $2,0 \times 10^3$ N/C. (a) Calcule el flujo eléctrico a través del disco. (b) ¿Cuál sería el flujo si el disco estuviera totalmente perpendicular al campo? (c) ¿Cuál sería el flujo si el disco estuviera totalmente paralelo al campo?

2. Un cubo de arista $L = 4$ cm posee un electrón en su centro. (a) Calcular el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo usando la ley de Gauss. (b) ¿Se puede calcular el flujo sobre cada cara si el electrón no estuviese en el centro? ¿Sería viable hacerlo mediante la ley de Gauss? Explique su respuesta.
3. Media superficie esférica no cerrada con radio 20 cm está ubicada de tal forma que su eje de simetría forma un ángulo de 30° respecto a un campo eléctrico uniforme de magnitud de $2,0 \times 10^3$ N/C. Calcule el flujo eléctrico a través de dicha superficie. Nota: utilice la ley de Gauss para simplificar el cálculo.
4. La figura 2.13 muestra un conjunto de cargas y distintas superficies cerradas, etiquetadas como 1, 2, y 3. Encuentre el flujo eléctrico a través de cada una de las tres superficies. Exprese sus respuestas en términos de Q y ϵ_0 .

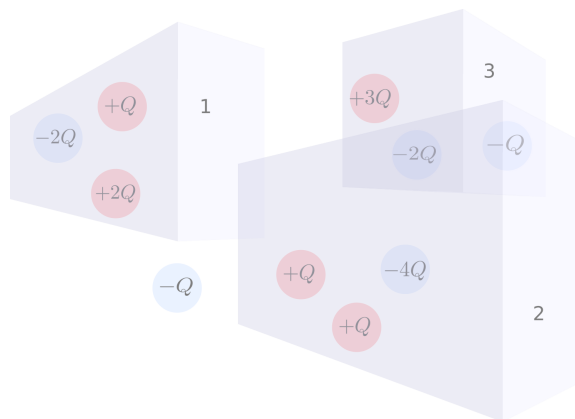


Figura 2.13. Tres superficies cerradas con cargas encerradas

5. Suponga que la esfera del ejemplo 1 no es aislante sino conductora. Hacer una gráfica, similar a la mostrada en este ejemplo, del campo eléctrico en función de la distancia.
6. Un caparazón esférico aislante posee un radio interno a y un radio externo b . La carga total sobre el caparazón es $-Q$. Hallar el campo eléctrico en las tres regiones que surgen.
7. Calcule el campo eléctrico para las diferentes regiones de la configuración de carga propuesta en el ejemplo 2, pero ahora considere la esfera interna como aislante con una distribución de carga uniforme.

8. Suponga que en el ejemplo 2 la carga del conductor interno es $-Q$, mientras que la carga neta del caparazón es $-7Q$. Hallar el campo eléctrico en las distintas regiones del sistema.
9. Suponga que la carga de la esfera del ejemplo 1 ya no está uniformemente distribuida. Por el contrario, la densidad de la esfera es proporcional a r^2 , donde r es la distancia del centro de la esfera a un punto dentro de esta. Calcular el campo eléctrico en las dos regiones de este sistema. Ayuda: entienda el ejemplo 3 de esta sección y adapte a este problema.
10. Calcule el campo eléctrico a una distancia r de un alambre infinito con densidad lineal de carga λ . Nota: si Q es la carga que existe en una línea finita de longitud L , entonces $\lambda = Q/L$.
11. Un cable coaxial largo consiste de un conductor cilíndrico interior con radio a y un cilindro exterior con radio interno b y externo c . El cilindro exterior está apoyado sobre aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene una densidad de carga positiva por unidad de longitud λ . Calcule el campo eléctrico en: (a) Cualquier punto entre los cilindros a una distancia r . (b) En cualquier punto fuera del cilindro exterior. (c) Determine las densidades de carga por unidad de longitud en la superficie interna y externa del cilindro exterior.
12. Un caparazón cilíndrico no conductor tiene radios internos y externos a y b , respectivamente. La carga total en el caparazón es Q y está uniformemente distribuida. La longitud del caparazón es suficientemente larga de tal forma que su longitud L se puede considerar infinita, pero su densidad lineal de carga, $\lambda = Q/L$, es finita. Encuentre el campo eléctrico a una distancia r del eje del cilindro en las distintas regiones que surgen.

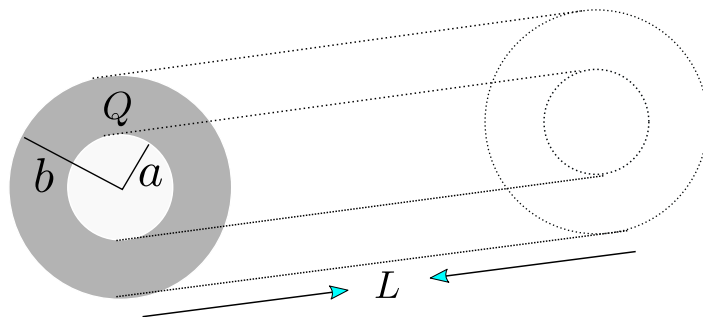


Figura 2.14. Ejercicio 12

-
13. Calcule el campo eléctrico en las diferentes regiones que surgen para las siguientes configuraciones de carga (todas separadas una distancia d): (a) Dos placas infinitas paralelas cargadas positivamente de manera uniforme con densidad de carga por unidad de área σ . (b) Dos placas infinitas paralelas cargadas uniformemente, una positiva con densidad de carga por unidad de área σ y la otra negativa con densidad de carga por unidad de área $-\sigma$. (c) Dos placas infinitas perpendiculares cargadas uniformemente, una positiva con distribución de carga por unidad de área σ y la otra negativa con distribución de carga por unidad de área $-\sigma$. Nota: en el punto (c), los planos se intersectan en el origen y las líneas de intersección coinciden con los ejes.

POTENCIAL ELÉCTRICO Y ENERGÍA

El lector estará familiarizado con el uso de electrodomésticos en su casa, ¿se ha preguntado cómo funcionan? Usted pensará: estos se conectan a la toma corriente y ya está. Pero, ¿cuál es el resultado de esta acción? Para entender esto es necesario acercarse al concepto de energía eléctrica y entender cómo el cambio de esta está asociado al trabajo necesario para que se muevan las cargas.

En los capítulos anteriores se observó cómo la carga eléctrica es la responsable de que objetos cargados experimenten una fuerza que pueda cambiar su estado de movimiento y cómo un objeto cargado experimenta una fuerza eléctrica en presencia de un campo eléctrico. Ahora, el presente capítulo tratará sobre el trabajo asociado a esta fuerza y, por supuesto, a la energía invertida en el movimiento de las cargas.

3.1. Trabajo y energía potencial eléctrica

Para empezar, imagine que tiene una bolsa con pelotas cargadas positivamente muy lejos de una región del espacio completamente vacía. Ahora saca una pelota con carga q_1 y la pone dentro de esa región. Como no había nada más en esa región, no había nada que le impidiera poner la carga dentro ¿Cierto? Ahora, ¿qué pasa si intenta poner una segunda carga q_2 a una distancia r de la primera carga? La carga q_2 experimentaría fuerza debido a q_1 en todo punto a una distancia finita r . En otras palabras, solo en el infinito la fuerza sería cero (porque depende del inverso del cuadrado de la distancia). Eso quiere decir que si q_2 estaba muy lejos en una posición r_b y la mueve hasta una posición r_a (más cerca de q_1), para hacer que la carga se acerque, usted tuvo que hacer un trabajo sobre la carga, oponerse al campo eléctrico producido por q_1 y vencer la fuerza de repulsión entre las cargas. Pero, ¿cómo saber cuál fue este trabajo? Para averiguarlo, considere cuál sería el trabajo realizado por

la carga q_1 para mover la carga q_2 , inicialmente en reposo, desde la posición r_a hasta la posición r_b (figura 3.1).

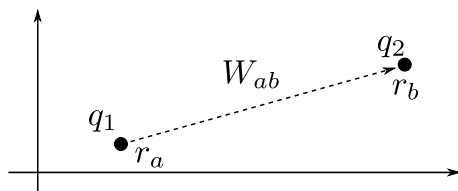


Figura 3.1. Trabajo realizado para llevar la carga positiva q_1 a la posición donde se encuentra la carga positiva q_2

En el caso donde las cargas sean de signo opuesto, la fuerza tratará de atraerlas, así el sistema mismo se encargará de proporcionar esta energía. Sin embargo, una vez estén juntas las cargas, se debe proporcionar un trabajo al sistema para llevar la carga q_1 hacia su posición inicial.

Recuerde que el trabajo necesario para que un objeto se desplace del punto a al punto b a través de un camino dado y debido a una fuerza \vec{F} es:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \theta dl \quad (3.1)$$

Donde θ es el ángulo entre el vector fuerza \vec{F} y el vector diferencial de camino $d\vec{l}$, el cual es un vector tangente a la trayectoria en el punto donde se encuentra el objeto en un instante dado. Observe que, por definición de producto punto, $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cos \theta dl$. Entonces, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica entre las cargas es

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b q_2 \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_2 E_1 \cos \theta dl \\ W_{ab} &= \int_a^b q_2 \frac{kq_1}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{Kq_1q_2}{r^2} \cos \theta dl \end{aligned} \quad (3.2)$$

El diferencial de camino $d\vec{l}$ mostrado en la figura es igual a $|dr|\hat{r}$. Este es paralelo a la dirección del campo eléctrico; por lo tanto, el ángulo θ entre los dos vectores es 0 y el $\cos \theta$ es 1. Así, el trabajo es:

$$\begin{aligned}
W_{ab} &= \int_a^b q_2 \frac{kq_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_2 \frac{kq_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot dr \hat{\mathbf{r}} \\
W_{ab} &= \int_a^b \frac{kq_1 q_2}{r^2} \cos \theta dr = \int_a^b \frac{kq_1 q_2}{r^2} dr \\
W_{ab} &= -\frac{kq_1 q_2}{r} \Big|_a^b = \frac{kq_1 q_2}{r_a} - \frac{kq_1 q_2}{r_b}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Así, el trabajo para que la carga se mueva es:

$$W_{ab} = \frac{kq_1 q_2}{r_a} - \frac{kq_1 q_2}{r_b} \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta el *teorema del trabajo y la energía*, se puede ver entonces que la siguiente expresión:

$$U_{12} = \frac{kq_1 q_2}{r_{12}} \tag{3.5}$$

representa un tipo de energía potencial que recibirá el nombre de *energía potencial eléctrica*. Observe que, así como en el caso gravitacional el cambio de la energía potencial está asociado al cambio de la altura con respecto a un sistema de referencia en presencia de un campo gravitacional, para el caso eléctrico el cambio de la energía potencial eléctrica está asociado al cambio de posición de la carga dentro de un campo eléctrico. En la expresión anterior r_a y r_b son distancias medidas desde un sistema de referencia dado. Por lo tanto, la diferencia de energía potencial eléctrica será:

$$\Delta U = \frac{kq_1 q_2}{r_b} - \frac{kq_1 q_2}{r_a} \tag{3.6}$$

Observe que a diferencia de la energía gravitacional, la potencial eléctrica sí puede ser tanto positiva como negativa. Si las cargas son de signos opuestos, la energía potencial asociada será negativa. Por el contrario, si son del mismo signo, la energía potencial entre las cargas será positiva sin importar si ambas son positivas o ambas son negativas.

Cuando se realiza un trabajo dado, este trabajo implica un cambio de energía potencial. ¿Bajo qué condiciones este cambio de energía es negativo y cuando es positivo? Para responder esto, imagine de nuevo el sistema de dos cargas positivas q_1 y q_2 , q_1 fija en el origen y q_2 a una distancia r_a de q_1 . Si se libera q_2 , al ser repelida por el campo producido por q_1 , la distancia entre las cargas aumentará y al llegar a

una distancia $r_b = 2r_a$, $r_a < r_b$ la energía potencial eléctrica habrá disminuido a la mitad; así, el cambio de energía potencial $\Delta U = U_f - U_0$ será negativo y el trabajo realizado será positivo.

Considere ahora una situación donde las cargas q_1 y q_2 son de signos opuestos; en este caso, al liberar la carga q_2 esta se moverá a una distancia r_b menor, suponga $r_b = r_a/2$, es decir, $r_b < r_a$ y la magnitud de la energía potencial se habrá duplicado. Sin embargo, el cambio de energía potencial seguirá siendo negativo y el trabajo realizado será positivo. En conclusión, si el trabajo lo realiza el sistema, este será positivo y, por consiguiente, el cambio de la energía potencial será negativo. Por el contrario, si el trabajo se realiza sobre el sistema (trabajo externo), este será negativo y a su vez el cambio de la energía potencial será positivo.

Ahora bien, se ha estado considerando que la carga q_1 está fija y que la única carga que se mueve es la carga q_2 . Esto ha sido una aproximación que puede ser válida siempre y cuando la masa de la carga q_1 sea mucho mayor que la de la carga q_2 . Sin embargo, cuando la carga q_2 ha estado separada una distancia r_a o r_b , la energía entre las cargas ha sido una energía instantánea, es decir, se ha “tomado una foto en cada instante”, y es en cada instante donde se ha evaluado la energía potencial.

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿pueden las cargas eléctricas estar en reposo por sí solas? ¿Hay alguna configuración en la que puedan estar en equilibrio estático? La respuesta a estas preguntas es no.

Considere ahora dos cargas del mismo signo: si usted acerca las cargas a una distancia dada, en el mismo instante en que las suelta se van a repeler y alejar. Esto para cualquier distancia sin importar qué tan alejadas estén, siempre y cuando no haya alguna fuerza externa diferente a la fuerza de Coulomb. Ahora, ¿qué pasa si las cargas son de signos opuestos? En este caso, al soltarlas, las cargas se atraerán y así se acercarán. Sin embargo, estas no alcanzarán un equilibrio estático estable, pues hay una distancia para la cual la física electrostática estudiada en este documento no es una buena aproximación y se deben considerar los efectos cuánticos. Por ejemplo, para entender la unión entre un protón y un electrón (átomo de hidrógeno) es necesario considerar su carácter cuántico. Sin embargo, se puede determinar cuál es la energía potencial eléctrica asociada al átomo de hidrógeno y otras distribuciones.

3.1.1. Energía potencial de una distribución discreta de cargas

En la sección anterior se llegó a que la energía potencial eléctrica entre un par de cargas es:

$$U_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

donde r_{12} es la distancia que separa las cargas.

Ahora, ¿qué pasa si se quiere traer una tercera carga? Por ejemplo, ensamblar el átomo de helio (2 electrones y un núcleo). ¿Cuál es la energía potencial eléctrica que está almacenada en este sistema? Para responder a esto observe que al traer el segundo electrón (carga q_3), este siente el campo generado tanto por el núcleo (carga q_1) como el generado por el electrón (carga q_2), como muestra la figura 3.2. Por lo tanto, la energía potencial total almacenada es:

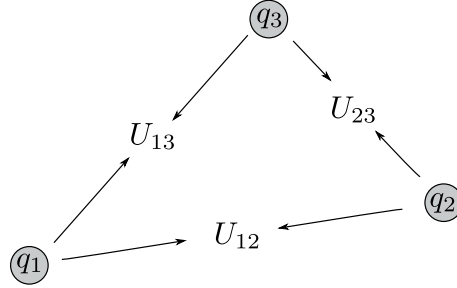


Figura 3.2. Energía entre tres cargas eléctricas; note que la tercera carga interactúa tanto con la primera como con la segunda, las cuales, a su vez, interactuaban antes de introducir la tercera

$$U_T = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Ahora, si se trae una cuarta carga, la energía potencial almacenada es:

$$U_T = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + k \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + k \frac{q_3 q_4}{r_{34}}$$

Observe que en general la energía entre dos cargas es de la forma:

$$U_{ij} = k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (3.7)$$

con i y j índices que indican cuáles son las cargas que se están considerando. Note además que el índice i llega hasta 4, mientras que el índice j llega hasta 3. Algo similar sucedió en el caso de las tres cargas: el índice i llegó a 3, mientras que el índice j llegó a 2. Esto se va a mantener para cualquier cantidad arbitraria n de cargas y se representa con la expresión $i > j$. Entonces para el caso general de n cargas, la energía potencial eléctrica almacenada sería:

$$U_T = \sum_{i>j}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Donde r_{ij} es la distancia que separa el par de cargas q_i y q_j . La expresión $i > j$ se introduce para evitar que la interacción entre un par de partículas se cuente dos veces.

3.2. Conservación de la energía

Al retomar el sistema de dos cargas y suponer que la masa de q_1 es mucho mayor que la masa de q_2 , cuando se suelta la carga q_2 desde el reposo esta se mueve adquiriendo una velocidad y asimismo cambiando su energía cinética. Por lo tanto, al recordar que la relación entre el cambio de la energía cinética y el trabajo realizado por el sistema viene dada por el *teorema del trabajo y la energía cinética*, se deduce que:

$$W_{ab} = K_b - K_a$$

A su vez, como el trabajo es igual a menos el cambio de una energía potencial:

$$W_{ab} = -(U_b - U_a)$$

Y si la energía mecánica total se conserva, al igualar las expresiones anteriores, la conservación de la energía estaría descrita por:

$$K_a + U_a = K_b + U_b \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{kq_1q_2}{r_a} = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{kq_1q_2}{r_b} \quad (3.9)$$

Tenga en cuenta que en la expresión anterior v_a y v_b hacen referencia a la velocidad de la carga q_2 con respecto a la carga q_1 en el instante inicial (a una distancia r_a) y en el instante final (a una distancia r_b), respectivamente. Observe además que se supuso que la masa de q_1 es mucho mayor que la de q_2 y bajo esta aproximación es válido suponer que la carga que se mueve es q_2 . Ahora bien, si las masas son comparables, por ejemplo al considerar dos protones, ambas cargas se moverán. Esto implica que las velocidades v_0 y v_f serán las velocidades relativas inicial y final, respectivamente.

3.3. Estrategias para ejercicios que involucren energía

Como fue visto, se pueden estudiar en detalle ejercicios que involucren el cálculo de la energía potencial eléctrica y ejercicios que se puedan resolver mediante la conservación de energía. Se comenzará con el primer caso.

3.3.1. Cálculo de energía potencial

El enfoque principal será en el cálculo de sistemas discretos de cargas, ya que sistemas continuos no serán cubiertos. A continuación se mostrarán unos pasos que son de bastante ayuda.

1. Haga un esquema del sistema que desea estudiar en caso de no ser proporcionado.
2. Identifique cuántas cargas puntuales contiene el sistema y cuente cuántas posibles interacciones hay. Si hay cuatro cargas, por ejemplo, existirán seis interacciones: la primera carga (cualquiera que escoja) con las tres restantes (en total tenemos tres interacciones), la segunda con dos cargas restantes (la interacción con la primera ya se contó; esto proporciona dos interacciones adicionales) y la última con la otra restante, ya que las interacciones con las otras dos ya se contaron (esto da una interacción adicional). Para un sistema con N partículas, el número de interacciones es $\frac{N(N-1)}{2}$.
3. Calcule la energía potencial de cada interacción. Si las cargas son de igual signo, la energía es positiva; si son de signo contrario, la energía será negativa. Note que al ser la energía un escalar, no hay que hacer descomposición vectorial.
4. Sume todas las interacciones y simplifique.

Ejemplo 1. Cuatro cargas de valor $q = 10\mu\text{C}$ están distribuidas en los cuatro vértices de un cuadrado de lado $L = 20\text{ cm}$. Calcule la energía potencial almacenada.

Solución

1. El dibujo se muestra en la figura 3.3.

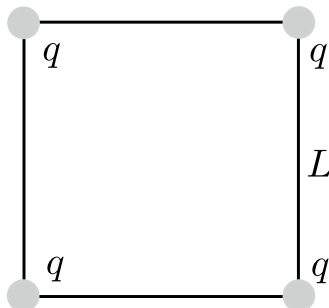


Figura 3.3. Dibujo de cuatro cargas formando un cuadrado

2. En total hay $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ interacciones. Se escogerá como la carga 1 la que está en la parte inferior izquierda y así en orden de las agujas del reloj.
3. La carga 1 interactúa con la 2, la 3 y la 4; en orden respectivo las energías son:

$$U_{12} = \frac{kq^2}{L} \quad , \quad U_{13} = \frac{kq^2}{\sqrt{2}L} \quad , \quad U_{14} = \frac{kq^2}{L} \quad (3.10)$$

Faltan sumar las interacciones que no involucran la primera carga, que ya fueron tenidas en cuenta. Estas son:

$$U_{23} = \frac{kq^2}{L} \quad , \quad U_{24} = \frac{kq^2}{\sqrt{2}L} \quad (3.11)$$

La última interacción es la que no involucra ni las cargas 1 ni 2, esta es:

$$U_{34} = \frac{kq^2}{L} \quad (3.12)$$

4. La suma da la energía total:

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34} \\ &= \frac{kq^2}{L} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}L} + \frac{kq^2}{L} + \frac{kq^2}{L} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}L} + \frac{kq^2}{L} \\ &= \frac{kq^2}{L} (4 + \sqrt{2}) = 21,66 \text{ J} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.3.2. Conservación de energía

Ahora se explicará como el principio de conservación de energía se puede usar para resolver una gran familia de problemas. Las estrategias de solución para este tipo de ejercicios son las siguientes:

1. Haga un esquema del sistema e identifique la situación inicial y final del problema.
2. Identifique la energía potencial eléctrica y cinética en cada una de las situaciones.
3. Plantee la energía total inicial y final del sistema (potencial eléctrica más cinética) e igualelas. Reconozca las variables desconocidas.
4. Despeje las variables desconocidas que pide el problema.

Ejemplo 1. Dos cargas puntuales positivas de valor $q = 100 \mu\text{C}$ y masa $m = 10^{-5} \text{ g}$ se encuentran separadas una distancia de 2 m. Una de las cargas está fija y la otra se mueve con una rapidez constante de 10^5 m/s hacia la otra cuando las separa esta distancia. (a) Hallar la velocidad de la partícula libre cuando la distancia de separación es 1 m. (b) Hallar la mínima distancia de separación. (c) Hallar la máxima rapidez de la partícula libre.

Solución

1. Un esquema se muestra en la figura 3.4. En la parte (a), por ejemplo, la situación inicial es aquella donde la separación es 2 m, la final es cuando la separación es 1 m.

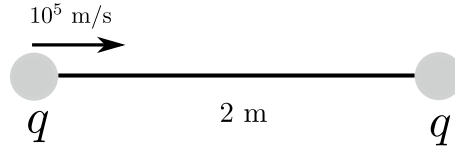


Figura 3.4. Dos cargas separadas por una distancia de 2 m

2. Aunque el ejercicio consta de tres partes, se mirarán en detalles los pasos para el primer caso y luego se resolverán los otros dos bajo el mismo mecanismo. En términos de $v = 10^5 \text{ m/s}$, $q = 10^{-4} \text{ C}$, $m = 10^{-8} \text{ kg}$ y $L = 2 \text{ m}$ se encuentra (note que $L/2 = 1 \text{ m}$):

$$U_i = \frac{kq^2}{L} \quad , \quad K_i = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad U_f = \frac{kq^2}{L/2} \quad , \quad K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad (3.14)$$

3. Se igualan las expresiones bajo el principio de conservación de energía y se encuentra:

$$\frac{kq^2}{L} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{2kq^2}{L} + \frac{1}{2}mv_f^2 \quad (3.15)$$

La variable desconocida es v_f .

4. Se despeja v_f encontrando:

$$v_f = \sqrt{v^2 - \frac{2kq^2}{mL}} = 31,6 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (3.16)$$

Para las partes (b) y (c) se sigue un proceso similar. La condición clave en la parte (b) es que la energía cinética en ese momento debe ser cero. Se deja al lector verificar que la separación final L_f viene dada por:

$$\frac{kq^2}{L} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{kq^2}{L_f} \Rightarrow L_f = \frac{kq^2}{\frac{kq^2}{L} + \frac{1}{2}mv^2} = 94,7 \text{ cm} \quad (3.17)$$

Para hallar la máxima rapidez exigimos la condición de que la distancia final sea infinita. También se deja al lector verificar que la máxima rapidez está dada por:

$$\frac{kq^2}{L} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{v^2 + \frac{2kq^2}{mL}} = 1,38 \times 10^5 \text{ m/s} \quad (3.18)$$

3.4. Potencial eléctrico

Se empezará por hacer la aclaración de que la energía potencial eléctrica y el potencial eléctrico son conceptos totalmente diferentes y por tal razón no deben ser confundidos. El primero se vio en la sección anterior y depende de la presencia de al menos dos cargas (q_1 y q_2): una que genere un campo (\vec{E}_1) y otra (carga de prueba) que sienta ese campo, de tal manera que la energía potencial almacenada entre ambas depende del producto de las cargas y del inverso de la distancia que las separa — r_{12} en la Ec. (3.5).

Por el contrario, el potencial eléctrico, el cual se denotará con la letra V , será una cantidad que depende de la carga generadora de campo eléctrico y no necesita una carga de prueba para existir. Así, se definirá el *potencial eléctrico* como la capacidad que tiene una carga q_1 de almacenar energía eléctrica cuando hay una carga de prueba q_2 que interactúa con la primera. En palabras más prácticas, el potencial eléctrico se puede definir como la energía potencial por unidad de carga. La expresión entonces que representa el potencial eléctrico generado por una carga a una distancia r está dado por la ecuación:

$$V_1 = \frac{U_{12}}{q_2} = \frac{kq_1}{r} \quad (3.19)$$

Donde r representa la distancia que hay entre la carga q_1 y el punto P donde se está observando (o midiendo) el potencial. En la deducción anterior, el punto P corresponde a la posición en la que estaba la carga q_2 , es decir, $r = r_{12}$.

Al hacer un paralelo entre el campo y la fuerza eléctrica, así como entre la energía y el potencial eléctrico, como muestra la tabla (3.1), se puede apreciar que los dos primeros son vectores, mientras que los dos últimos son escalares. El campo y el

potencial dependen de la carga que genera el campo y del punto P donde se está observando, mientras que la fuerza y la energía dependen de la carga de prueba también.

Tabla 3.1

Una carga	Dos cargas
$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r^2} \hat{r}$	$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$
$V_1 = \frac{kq_1}{r}$	$U_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}$

Por otro lado, si se tienen varias cargas presentes en alguna región del espacio $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ (distribución discreta de carga), el potencial total en un punto P será la suma del potencial generado por cada carga; en otras palabras:

$$V_T = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3} + \dots + \frac{kq_n}{r_n} = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{r_i} \quad (3.20)$$

Donde r_i representa la distancia desde la carga i al punto P donde se está observando el potencial.

3.4.1. Potencial eléctrico de una distribución discreta de cargas

Esta situación es, por supuesto, una configuración donde se tiene un número finito de partículas que generan el potencial eléctrico. El potencial total viene dado por la relación (3.20). El método de solución es muy similar al explicado para el cálculo del campo eléctrico. Para encontrar el potencial se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Analice y plantee la pregunta del problema, haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.
2. Identifique primero el punto sobre el cual se debe calcular el potencial, reconozca sus coordenadas de acuerdo con el marco de referencia escogido.
3. Localice las cargas que generan potencial eléctrico sobre el punto en cuestión. Determine la distancia de cada carga al punto de observación y calcule el potencial asociado. Tenga en cuenta que acá no hay necesidad de descomponer vectorialmente.
4. Sume las contribuciones de todos los potenciales usando la fórmula indicada antes.

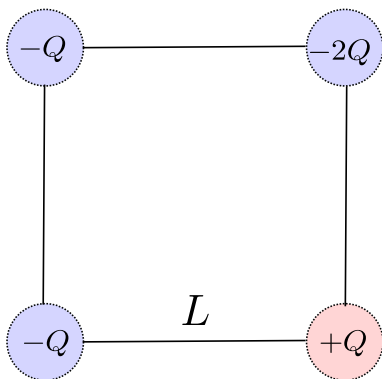
Ejemplo 1. Calcule la rapidez de un protón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de $\Delta V = 120$ V. Hacer lo mismo para un electrón.

Solución

Aunque este problema no es de la clase que se pretende resolver, vale la pena discutirlo para conectarlo con el concepto de energía.

La masa de un protón es $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, la del electrón es $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg. Las cargas son, respectivamente, $q = \pm e = \pm 1,602 \times 10^{-19}$ C. Por conservación de energía cinética $\Delta K = q\Delta V$. Así, $\frac{1}{2}mv^2 = |q\Delta V|$ o $v = \sqrt{2|q\Delta V|/m}$. Usando los datos conocidos encontramos que para el protón $v_p = 1,51 \times 10^5$ m/s y para el electrón $v_e = 6,45 \times 10^6$ m/s. Hay que tener en cuenta que para el electrón la diferencia de potencial debe ser negativa, con el fin de que esta partícula pueda ser acelerada.

Ejemplo 2. En términos de Q y L , encuentre el potencial eléctrico en (a) el centro del cuadrado, (b) el punto medio de la base superior, la cual conecta las cargas con valores $-Q$ y $-2Q$.



Solución

En este caso sí seguimos los pasos propuestos:

1. El dibujo ya está proporcionado.
2. Se toma el marco de referencia en la carga inferior izquierda. A esta carga se llama la carga 1, y así se sigue en sentido horario. El centro del cuadrado tiene coordenadas $(L/\sqrt{2}, L/\sqrt{2})$; las coordenadas de la parte media de la base superior son $(L/2, L)$.

3. Se nota que la distancia de todas las cargas al centro del cuadrado es $L/\sqrt{2}$. Así, para el centro del cuadrado se tiene:

$$V_1 = V_2 = -\frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} , \quad V_3 = -\frac{2\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} , \quad V_4 = \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} \quad (3.21)$$

En el otro punto se tiene:

$$V_1 = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{5}L} , \quad V_2 = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 L} , \quad V_3 = -\frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 L} , \quad V_4 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{5}L} \quad (3.22)$$

4. Se suman todos los potenciales. En el centro del cuadrado:

$$V = -\frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} - \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} - \frac{2\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} = -\frac{3\sqrt{2}Q}{4\pi\epsilon_0 L} \quad (3.23)$$

En el otro punto se encuentra:

$$V = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{5}L} - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 L} - \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{5}L} = -\frac{3Q}{2\pi\epsilon_0 L} \quad (3.24)$$

3.4.2. Potencial eléctrico de una distribución continua de cargas

De nuevo, tal como fue visto en la sección 1.3.3, el enfoque ahora es estudiar el potencial generado por objetos con distribuciones continuas, los cuales pueden ser vistos como un conjunto infinito de cargas.

El proceso explicado anteriormente se adapta ahora como se muestra a continuación. Primero se divide la carga mostrada en la figura 3.5 en pedazos muy pequeños (infinitesimalmente pequeños), de manera que cada uno contenga una carga de valor dq . Cada carga de valor dq está a una distancia r del punto de observación. Esta distancia se debe calcular en términos de las coordenadas del objeto y la posición del punto de prueba, $r = |\vec{r}_p - \vec{r}_q|$. Esta carga genera entonces un potencial infinitesimal de valor dV . Sin embargo, para hallar el campo total debemos sumar todas las posibles contribuciones de cada carga infinitesimal dq . Cuando los pedazos son tan pequeños que los hacemos puntuales, $dq \rightarrow 0$ y la suma habitual se transforma en una integral. Esto se puede resumir en la siguiente fórmula:

$$V = \int \frac{k dq}{r} \quad (3.25)$$

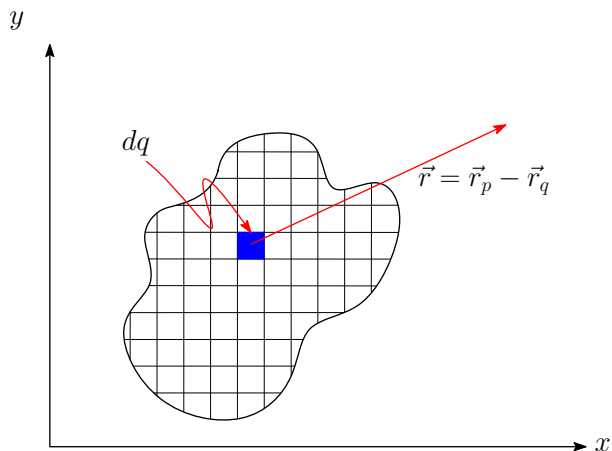


Figura 3.5. Potencial generado por distribuciones continuas

Recuerde las tres categorías de objetos que se consideran:

- *Unidimensionales.* Aquellos donde el objeto se puede reducir a una única dimensión, dado que dos de las tres dimensiones son irrelevantes (barras delgadas, anillos delgados, entre otros). Acá se puede definir una densidad lineal de carga de la forma $\lambda = \frac{dq}{ds}$, donde ds representa la coordenada a lo largo de la cual el objeto está distribuido y, por lo tanto, es la coordenada respecto a la cual la integral debe ser realizada.
- *Bidimensionales (discos, planos rectangulares, entre otros).* Se define una densidad superficial de carga de la forma $\sigma = \frac{dq}{dA}$. Ahora dA representa un elemento de área, ya que el objeto se difunde a lo largo de una superficie.
- *Tridimensionales (esferas, cilindros, etc.).* Para estos objetos se define una densidad volumétrica de la forma $\rho = \frac{dq}{dV}$. Acá dV representa un elemento de volumen, y se deberá integrar a lo largo de este.

3.4.3. Ejemplos y técnicas de solución

Los pasos se adaptan al cálculo del potencial eléctrico de la siguiente manera:

1. Analice y plantee la pregunta del problema, haga un dibujo de la situación en caso de ser necesario.
2. Identifique primero el punto sobre el cual se debe calcular el campo, reconozca sus coordenadas.

3. Identifique si el objeto cargado es unidimensional, bidimensional o tridimensional. Para el caso correspondiente defina la densidad de carga apropiada.
4. En el objeto donde se localiza la carga identifique un lugar arbitrario que contiene una carga infinitesimal dq , reconozca sus coordenadas y los del punto de observación para así calcular la distancia entre estos dos puntos.
5. Escriba el potencial infinitesimal dV ejercido por esta pequeña porción. No se preocupe ahora por hacer descomposición vectorial, ya que el potencial es un escalar.
6. Escriba dq en función de la densidad y las coordenadas, plantee la integral y resuélvala. Tenga en cuenta que los límites de la integral están relacionados con las dimensiones del objeto.

Ejemplo 1. Un anillo de radio R está ubicado sobre el plano xy , con su centro en el origen. La porción del anillo que está sobre la parte positiva del eje x tiene una carga positiva $+Q$ y la porción del anillo que está sobre la parte negativa del eje x tiene carga $-Q$. Hallar el potencial eléctrico generado por el anillo en un punto sobre el eje z .

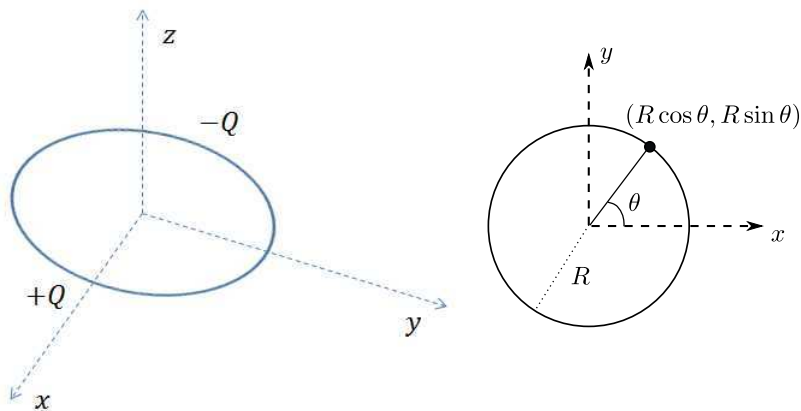


Figura 3.6. Izquierda: anillo cargado. Derecha: vista desde arriba indicando las coordenadas de un punto sobre el anillo

Solución

Se realizan los pasos indicados.

1. El dibujo se muestra en la figura 3.6.

2. El punto de observación posee coordenadas $(0, 0, z)$.
3. El objeto es unidimensional. Para este caso se tiene la densidad:

$$\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{Rd\theta} = \begin{cases} +\frac{Q}{\pi R} & , \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{Q}{\pi R} & , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (3.26)$$

El ángulo θ es el correspondiente al plano xy (figura 3.6).

4. Como se muestra en la figura 3.6, un punto sobre el anillo tiene coordenadas $\vec{r}' = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j}$. La distancia de este punto al punto de observación es $r = \sqrt{R^2 + z^2}$.
5. El campo infinitesimal es:

$$dV = \frac{k dq}{r} = \frac{k R \lambda d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (3.27)$$

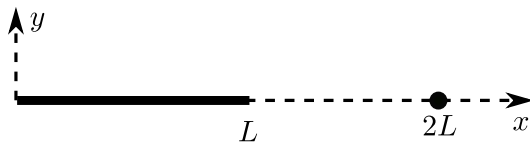
6. Se integra obteniendo:

$$\begin{aligned} V &= k \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q}{\pi R (R^2 + z^2)^{1/2}} R d\theta - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{Q}{\pi R (R^2 + z^2)^{1/2}} R d\theta \right\} \\ &= \frac{kQ}{\pi (R^2 + z^2)^{1/2}} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \right\} \\ &= \frac{kQ}{\pi (R^2 + z^2)^{1/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ejemplo 2. Para el ejercicio 14 de la sección 1.6, encontrar el potencial eléctrico indicado en el literal (b).

Solución

1. El dibujo se muestra en la figura inferior:



2. El punto de observación posee coordenadas $(2L, 0)$.

3. El objeto es unidimensional y la densidad es $\lambda = \frac{dq}{dx} = Cx$.
4. La distancia de un punto sobre la línea al punto de observación es $2L - x$.
5. El potencial infinitesimal es:

$$dV = \frac{k dq}{2L - x} = \frac{kCx dx}{2L - x} \quad (3.29)$$

6. La integral da entonces:

$$V = \int_0^L \frac{kCx dx}{2L - x} = -kC \left[x + 2L \ln |x - 2L| \right]_0^L = kCL [2 \ln 2 - 1] \quad (3.30)$$

3.5. La diferencia de potencial

3.5.1. Diferencia de potencial

La *diferencia de potencial* $\Delta V = V_b - V_a$ está relacionada con la capacidad que tiene una carga q_1 en una región del espacio para producir un trabajo capaz de mover una carga de prueba del punto a al punto b . Para verlo es bueno volver al trabajo realizado por un campo al desplazar una carga. De la ecuación (3.4):

$$W_{ab} = \frac{kq_1q_2}{r_a} - \frac{kq_1q_2}{r_b} = q_2 \left(\frac{kq_1}{r_a} - \frac{kq_1}{r_b} \right) = -q_2 \Delta V \quad (3.31)$$

Como $W_{ab} = -(U_b - U_a) = -\Delta U$, la relación entre el cambio de energía potencial y la diferencia de potencial es:

$$\Delta U = q_2 \Delta V \quad (3.32)$$

Hasta el momento no se ha hablado de cuáles son las unidades del potencial eléctrico y la razón es que pueden generar confusión conceptual. Las unidades del potencial son voltios [V], donde:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

Por lo tanto, las unidades de la diferencia de potencial también son voltios. Ahora bien, la medida de la diferencia de potencial se conoce como *voltaje* (un nombre que es seguramente familiar para el lector). Así, el potencial eléctrico V en un punto P da cuenta de la capacidad de almacenar energía potencial al ubicar una carga de prueba q en ese punto P ; la diferencia de potencial entre dos puntos a y b da cuenta

de la capacidad de hacer trabajo al desplazar una carga de prueba q del punto a al punto b ; por último, el voltaje es la medida de esa diferencia de potencial.

Es importante mencionar que la diferencia de potencial siempre requiere dos puntos: el inicial y el final. Visto de otra forma, la diferencia de potencial siempre se calcula respecto a un punto de referencia. No importa si un punto posee un potencial muy alto, si el punto de referencia está al mismo potencial la diferencia es nula y no habría energía capaz de mover las cargas eléctricas.

3.5.2. Relación entre campo y potencial eléctrico

Ahora bien, el campo eléctrico y el potencial eléctrico están íntimamente relacionados. Al considerar de nuevo que $W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$, se puede deducir que:

$$\Delta V = V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.33)$$

La ecuación (3.33) describe la relación en forma integral que existe entre el campo y la diferencia de potencial. Esta expresión se puede escribir también en forma diferencial de la siguiente forma:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.34)$$

Donde $\vec{\nabla}$ es el operador gradiente, que en coordenadas cartesianas (x, y, z) es:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.35)$$

En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) es:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.36)$$

Y en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) toma la forma:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.37)$$

Así, por ejemplo, las componentes del vector campo eléctrico en coordenadas cartesianas estarían dadas por:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (3.38)$$

Así, si se quiere hallar la diferencia de potencial entre dos puntos a partir del campo presente en el espacio dado, se puede utilizar la expresión (3.33). Si se conoce la función potencial V y se quiere calcular el campo asociado en un punto dado, se puede utilizar la expresión (3.34).

3.6. Ejercicios

1. Suponga que cinco cargas iguales, de valor Q , están organizadas a lo largo de una línea recta, donde la segunda carga está a una distancia L de la primera, la tercera a una distancia L de la segunda y así sucesivamente. Calcular la energía potencial almacenada en el sistema.
2. Hacer el mismo ejercicio anterior, con la diferencia de que las cargas toman valores $+Q$, $-Q$, $+Q$, $-Q$ y $+Q$ en este orden.
3. Encontrar la energía almacenada por tres cargas de valor Q ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado L . Calcular también la energía que almacenaría el sistema si una de las tres cargas fuese negativa.
4. Un electrón libre se dirige hacia otro electrón fijo, inicialmente separado a una distancia de 1 mm. (a) Encontrar la máxima velocidad que puede tener el electrón libre en ese momento para que no colisionen. Suponiendo que se lanza el electrón con la velocidad calculada en el punto anterior, ¿cuál sería la máxima velocidad que alcanza el electrón después de ser repelido por el otro?
5. Un electrón se mueve a la cuarta parte de la velocidad de la luz en un potencial de 12 V y se acerca a una segunda región, donde el potencial es distinto. Calcular el potencial que debe tener la segunda región para (a) frenarlo a la mitad de su velocidad inicial, (b) frenarlo totalmente, (c) duplicarle su rapidez.
6. La energía total de un electrón que orbita un protón (átomo de hidrógeno clásico) es $-13,6$ eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$). Suponga que otra partícula le da energía adicional para hacer que el electrón justo escape la atracción del protón y quede libre. ¿Con qué velocidad inicial debería salir este electrón?
7. Para la configuración mostrada en el ejemplo 1 de la sección 3.3.1, calcular el potencial en (a) el centro del cuadrado, (b) la parte media de la base inferior y (c) un punto a una distancia $2L$ de la carga inferior izquierda y a una distancia L de la carga superior izquierda.
8. Calcular el potencial eléctrico generado por el hexágono del ejemplo 2 de la sección 1.3.2 en (a) el centro del hexágono, (b) la parte media de la arista inferior.
9. Suponga que cargas de valor $q_1 = 1 \text{ mC}$, $q_2 = -2 \text{ mC}$, $q_3 = 1 \text{ mC}$ y $q_4 = -1 \text{ mC}$ se colocan en los vértices de un campo de fútbol. Calcular el potencial eléctrico en el centro el campo de fútbol para todas las posibles combinaciones

de cargas posibles (todas las posibilidades distintas de colocar las cuatro cargas en los cuatro vértices). Haga las estimaciones que requiera necesarias.

10. Hacer lo mismo del ejercicio anterior pero calculando el potencial en el punto del piso justo en la mitad de una de las porterías.
11. Resuelva el ejercicio 12 de la sección 1.6 pero ahora calculando el potencial eléctrico en los tres puntos dados.
12. Un anillo uniformemente cargado tiene una carga total de $Q = +18 \text{ nC}$ y un radio de $R = 10 \text{ cm}$ y se ubica sobre el plano xy con su centro en el origen. Un electrón se ubica sobre el eje del anillo (eje z) a una distancia $d = 20 \text{ cm}$ del centro del anillo y su movimiento se restringe a ese eje. El electrón se libera del reposo. (a) Describa el movimiento del electrón. (b) Encuentre la velocidad del electrón cuando alcanza el centro del anillo.
13. Una barra delgada se ubica a lo largo del eje y con su centro en el origen. La barra posee una longitud L y una carga total Q . Hallar el potencial eléctrico a lo largo del eje x si (a) la densidad de carga toma la forma $\lambda = C|y|$, donde C es una constante, (b) la densidad de carga es constante.
14. Si el potencial eléctrico de un sistema toma la forma:

$$V(x, y, z) = A \frac{xy - z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (3.39)$$

Donde A es una constante, hallar el vector campo eléctrico.

15. El potencial eléctrico de una región es (en Voltios) $V(x, y, z) = x^2 - 2xy - y^2 + 5$. Hallar los puntos donde el campo eléctrico es cero.
16. El campo eléctrico generado por una placa infinita ubicada a lo largo del plano xy es constante y de magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. Si la densidad superficial de carga de una placa infinita es 4 nC/m^2 , hallar la distancia a la cual el potencial eléctrico es (a) 12 V , (b) 20 V , (c) 50 V .

CAPACITORES

4.1. Capacitancia

Uno de los propósitos de la física es aportar las bases científicas para el desarrollo de elementos elaborados por la ingeniería. Uno de estos elementos es el condensador, el cual tiene la propiedad de almacenar energía. Los condensadores tienen diversas aplicaciones en las que este almacenamiento se hace a partir de fuentes como las baterías, en aparatos como las cámaras fotográficas donde la descarga de los condensadores se produce cuando se utiliza el flash. Este procedimiento se puede hacer extensivo a otros aparatos que involucren campos eléctricos. La cantidad de carga por unidad de voltaje que puede ser almacenada define el concepto capacitancia.

Existen condensadores de varias formas y tamaños. Un condensador consta de dos conductores aislados de diversas formas geométricas llamadas placas. Uno de los condensadores más común es llamado condensador de placas paralelas, donde el área de las placas es llamada A y las placas están separadas una distancia d . El símbolo usado para representar un condensador está basado en un par de líneas paralelas de la misma longitud.

Cuando un condensador está cargado, la carga en sus placas tiene la misma magnitud, pero una de ellas es positiva y la otra es negativa. Por lo tanto, cuando hablamos de la carga, Q es la magnitud de una ellas. La razón de por qué las placas son conductoras es porque se trata de superficies equipotenciales donde todos los puntos están al mismo potencial (además los conductores permiten la acumulación de carga en sus superficies); sin embargo, hay una diferencia de potencial entre las dos placas. Usamos la diferencia de potencial como el valor positivo ΔV , el cual es directamente proporcional a la carga Q , es decir:

$$Q = C\Delta V \tag{4.1}$$

donde C es la capacitancia del condensador. El valor de la capacitancia depende de la geometría de las placas, mas no de su carga o diferencia de potencial. La capacitancia es una medida de cuánta carga debe haber entre las placas para tener una diferencia de potencial dada entre ellas. Las unidades de la capacitancia en el sistema internacional (SI) son Coulomb sobre Voltio, llamadas faradios (F). Los faradios son unidades muy grandes por lo que se utilizan unidades de microfaradios (μF) generalmente.

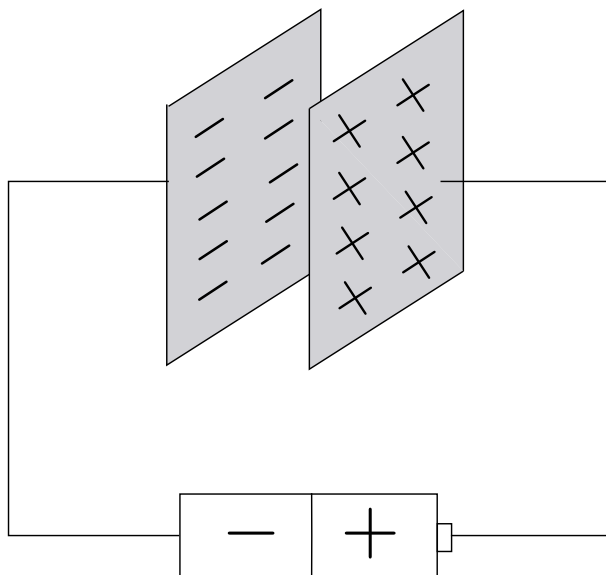


Figura 4.1. Esquema de un condensador de placas paralelas

4.1.1. ¿Cómo llega la carga al condensador?

Una forma de cargar un condensador es construyendo un circuito eléctrico con una batería. Un circuito eléctrico es un camino por donde puede fluir carga. Una batería es un mecanismo que puede mantener una diferencia de potencial constante entre sus terminales, donde fuerzas eléctricas pueden mover carga internamente. El terminal de mayor potencial es simbolizado “+”, llamado terminal positivo, y el terminal de menor potencial “-” es llamado terminal negativo. La carga puede fluir a través de un conductor como un alambre. Cuando el circuito está funcionando, las cargas son llevadas por los alambres debido al campo eléctrico que establece la batería. El campo lleva cargas de una placa del condensador a la otra placa hasta que las placas quedan cargadas.

Al comienzo, cuando las placas están sin carga, el potencial entre ellas es cero. Cuando las placas están cargadas, la diferencia de potencial es igual a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería. La placa positiva del condensador está al mismo potencial que el terminal positivo de la batería y la placa negativa está al mismo potencial que el terminal negativo de la batería. Entonces decimos que el condensador está completamente cargado.

4.1.2. Cálculo de la capacitancia



Figura 4.2. Condensadores comerciales

Para calcular la capacitancia de un condensador es necesario conocer su geometría. Existen diferentes clases de geometría y hay que desarrollar un plan para simplificar el procedimiento. Un método puede ser:

1. Asumir que hay una carga Q en las placas.
2. Calcular el campo eléctrico entre ellas en términos de la carga usando la ley de Gauss.
3. Conociendo el campo eléctrico, calcular la diferencia de potencial entre las placas.

4. Calcular la capacitancia C a partir de la ecuación (4.1).

Ejemplo 1. Un capacitor (condensador) de placas cilíndricas es formado por dos cilindros concéntricos: uno interno de radio a con carga $+Q$ y otro externo de radio b con carga $-Q$. Si los cilindros tienen un largo L (muy grande), calcular la capacitancia del sistema.

Solución

Se comienza haciendo un esquema como el mostrado en la figura 4.3

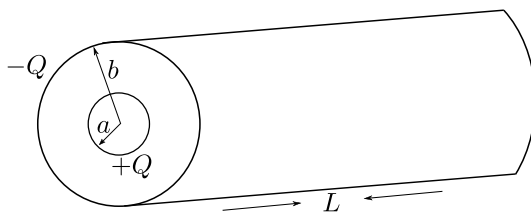


Figura 4.3. Capacitor de placas cilíndricas

Ahora se siguen los pasos:

1. En el esquema ya se mostraron las cargas.
2. El campo eléctrico dentro del cilindro interno es nulo (porque es conductor); por fuera de los dos cilindros también es cero porque la carga encerrada es cero. Esto es algo que siempre sucede en un condensador. Únicamente hay campo entre las dos placas. Si r es la distancia radial del centro de los cilindros a cualquier punto dentro de las placas, se puede usar la ley de Gauss para verificar que (se deja al lector verificar el resultado) $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \hat{r}$, donde \hat{r} es justamente un vector unitario en la dirección radial.
3. Ahora se calcula la diferencia de potencial entre la placa positiva y la negativa, que es:

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln r \Big|_a^b = \frac{Q \ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 L} \quad (4.2)$$

4. La capacitancia es ahora:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \quad (4.3)$$

Observe que este resultado únicamente depende de factores geométricos, como los radios y las dimensiones de los cilindros.

4.2. Condensadores en serie y en paralelo

Cuando existe una combinación de capacitores en un circuito eléctrico, podemos reemplazar esa combinación por un condensador equivalente, que es un condensador con la misma capacitancia de la combinación de los condensadores. Reemplazando el condensador equivalente, podemos simplificar el circuito llegando a calcular las variables desconocidas de una forma más sencilla.

4.2.1. Condensadores en serie

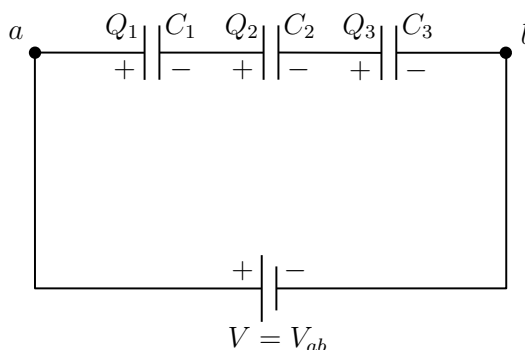


Figura 4.4. Condensadores en serie

La figura 4.4 muestra condensadores conectados en serie con una batería. En serie significa que los condensadores están alambrados uno después del otro y que la diferencia de potencial se aplica a los dos extremos de la serie. Las diferencias de potencial que existen a través de los condensadores en serie producen cargas iguales, q en cada uno. La suma de las diferencias de potencial de los condensadores es igual a la diferencia de potencial ΔV .

Se puede explicar cómo los condensadores terminan con la misma carga siguiendo una reacción en cadena en la que la carga de un condensador causa la carga del siguiente condensador. Cuando una batería es conectada a la serie de condensadores, produce una carga $-Q$ en la placa de un condensador en un extremo que repele la carga negativa de la otra placa. La carga negativa repelida se mueve a la placa del siguiente condensador, que luego repele la carga negativa de la placa del siguiente condensador. Finalmente, la carga del último condensador mueve la carga negativa a la otra placa del condensador a la batería, dejando la placa con carga $+Q$.

Los condensadores en serie se pueden reemplazar por un condensador equivalente que tenga la misma carga y la diferencia de potencial total ΔV como la suma de las diferencias de los condensadores en serie.

Para encontrar una expresión C_{eq} se puede usar la ecuación (4.1) para encontrar la diferencia de potencial de cada condensador real:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

La diferencia de potencial total ΔV debida a la batería es entonces la suma de las diferencias de potencial de los condensadores en serie:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

La capacitancia equivalente es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Se puede a su vez generalizar esta expresión a n condensadores en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (4.4)$$

4.2.2. Condensadores en paralelo

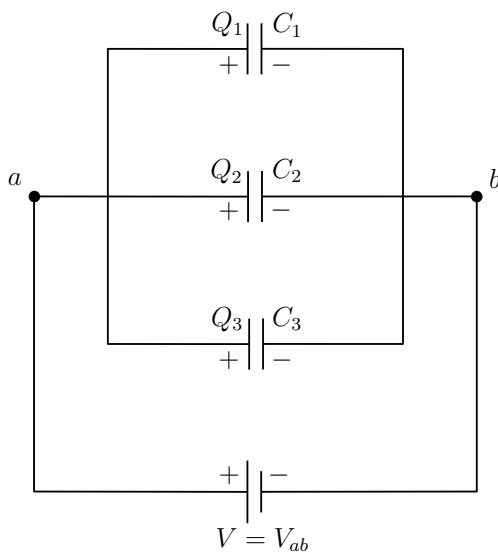


Figura 4.5. Condensadores en paralelo

La figura 4.5 muestra un circuito con condensadores conectados a una batería. En paralelo significa que los condensadores están directamente alambrados a una placa y también directamente alambrados a la otra placa, donde la misma diferencia de potencial es aplicada a los condensadores de manera que cada condensador tiene la misma diferencia de potencial entre sus placas, lo cual causa que los condensadores se carguen y la carga total sea la suma de las cargas almacenadas en cada uno de ellos.

Para hallar una expresión para la capacitancia C_{eq} se debe encontrar la carga de cada capacitor real:

$$Q_1 = C_1 \Delta V; \quad Q_2 = C_2 \Delta V$$

La carga total de la combinación paralelo será:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V$$

La capacitancia equivalente con la misma carga total y la diferencia de potencial ΔV será:

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

Haciendo extensivo el concepto para n condensadores en paralelo la fórmula sería:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + + C_n \quad (4.5)$$

4.3. Energía almacenada en un condensador

Para cargar un condensador se requiere que un agente externo realice un trabajo. Por ejemplo, imagine que se tiene un condensador descargado y que se pueden transferir electrones de una placa a otra. El campo eléctrico que se construye en el espacio entre las dos placas tiene una dirección que se opone a generar más transferencia de cargas. A medida que la carga se acumula en las dos placas, se tiene que aumentar la cantidad de trabajo para transferir más electrones. Este trabajo lo tendría que realizar una batería, disminuyendo así su energía química.

Se puede imaginar el trabajo realizado para cargar un condensador como una forma de energía potencial eléctrica U en el campo eléctrico existente entre las placas. Se puede recuperar esta energía descargando el condensador en un circuito como cuando la energía potencial se transforma en energía cinética.

Supongamos que en un instante dado una carga q se ha transferido de una placa de un condensador a la otra. La diferencia de potencial entre las placas en ese instante

sería q/C . Si se transfiere entonces un incremento de carga dq , el incremento de trabajo sería:

$$dW = Vdq = qdq/C$$

Entonces el trabajo necesario para cargar completamente el condensador sería:

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C}$$

Así, como el trabajo está relacionado con la energía almacenada por el condensador, la energía en el condensador es:

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.6)$$

Esta energía se puede expresar de diferentes formas. Por ejemplo:

$$U = \frac{Q^2}{2C} ; U = \frac{C\Delta V^2}{2} ; U = \frac{Q\Delta V}{2}$$

Si se quiere, por ejemplo, calcular la energía almacenada en un condensador de placas cilíndricas, se usa la fórmula 4.3 para encontrarla. Se determina entonces que esta almacena una energía:

$$U = \frac{Q^2 \ln(b/a)}{4\pi\epsilon_0 L} \quad (4.7)$$

4.4. Dieléctricos

Hasta el momento se ha asumido que la región entre las dos placas cargadas de un condensador está desocupada: es aire. No obstante, en la realidad, la gran mayoría de capacitores poseen un material entre estas dos placas que cambia sus propiedades. Este material se llama un dieléctrico.

Un dieléctrico es básicamente un material con propiedades aislantes; la variable que describe este material se llama normalmente K . Si un capacitor sin dieléctrico posee una capacitancia C_0 , la nueva capacitancia con dieléctrico toma la forma:

$$C_K = KC_0$$

Note que K es un número adimensional. Normalmente $K \geq 1$, siendo $K = 1$ el valor obtenido para el vacío (aire en realidad). De esta manera, se puede ver que un dieléctrico siempre aumenta el valor de la capacitancia. Para entender cómo sucede esto, considere el condensador de placas paralelas mostrado en la figura 4.6, el del centro sin dieléctrico y el de la derecha con un dieléctrico de constante dieléctrica K .

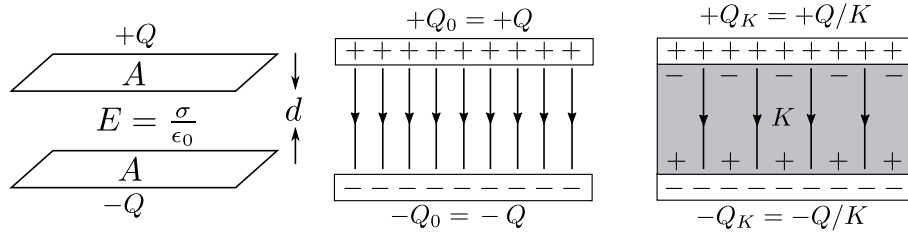


Figura 4.6. Derecha: propiedades del capacitor. Centro: capacitor sin dieléctrico. Izquierda: capacitor con dieléctrico

Primero se calcula la diferencia de potencial en el condensador sin dieléctrico. Si se considera y la dirección vertical, esta es $\Delta V = \int_0^d E dy = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Q_0 d}{A \epsilon_0}$. Note que entre mayor sea la carga, mayor será el potencial; sin dieléctrico $Q = Q_0$. La capacitancia es así $C = C_0 = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A \epsilon_0}{d}$.

Ahora analice lo que pasa en el condensador cuando hay un aislante (dieléctrico) en el medio. Recuerde que las placas iniciales producen un campo eléctrico hacia arriba; este campo eléctrico a su vez desplaza las cargas del material. Aunque el material es aislante, algo de efecto se siente. Así, algunas de las cargas negativas del material se sienten atraídas hacia las positivas de la placa superior, y viceversa. Entre más aislante sea el material, más oposición al movimiento de cargas se ejerce y así menos cargas se mueven, pero si el material tiende a ser un buen conductor, muchas cargas eléctricas se podrán mover.

Lo que sucede al moverse las cargas es que la carga efectiva de las placas positivas y negativas se reduce (de 9 a 4 en este caso), ya que las cargas que han sido atraídas cancelan el efecto de algunas de las que se encuentran en las placas. Como la carga efectiva se ha disminuido a un valor menor, que en este caso es $Q_K = \frac{Q}{K}$, el nuevo potencial es $\Delta V_K = \frac{Q_K d}{A \epsilon_0}$. La nueva capacitancia es ahora $C = C_K = \frac{Q}{V_K} = \frac{A K \epsilon_0}{d} = K C_0$.

Como consecuencia de esto, se pueden deducir las siguientes relaciones (el subíndice 0 se refiere al condensador sin dieléctrico y el subíndice K al capacitor con dieléctrico):

$$\Delta V_K = \frac{\Delta V_0}{K} , \quad E_K = \frac{E_0}{K} , \quad C_K = K C_0 , \quad U_K = \frac{U_0}{K} \quad (4.8)$$

Las relaciones anteriores son ciertas para todo tipo de condensadores, no necesariamente de placas paralelas.

Ruptura de un dieléctrico: algunas veces los condensadores se dañan cuando se conectan a una fuente de voltaje muy elevada, ¿por qué? Cuando el potencial es muy alto, se rompen los enlaces de las moléculas que componen el dieléctrico y así el material se vuelve conductor. Cuando esto sucede, las cargas son libres de moverse

sin restricción. En este caso todas las cargas positivas de la placa superior se cancelan por un igual número de cargas negativas del ahora conductor, y viceversa. Como consecuencia, no hay carga neta en las placas y no hay diferencia de potencial entre las placas. El condensador así pierde sus propiedades y deja de funcionar.

4.5. Ejemplos y técnicas de solución

1. Lea comprensivamente el enunciado y haga un planteamiento de lo que le están preguntando.
2. Si es posible realice un esquema del sistema.
3. Identifique las variables o parámetros tanto conocidas como desconocidas del ejercicio.
4. Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades.
5. Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.
6. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.
7. Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado.

Usando estos pasos, se pueden resolver algunos ejercicios sobre capacitores.

Ejemplo 1. Hallar la capacitancia equivalente del sistema mostrado en la figura 4.7.

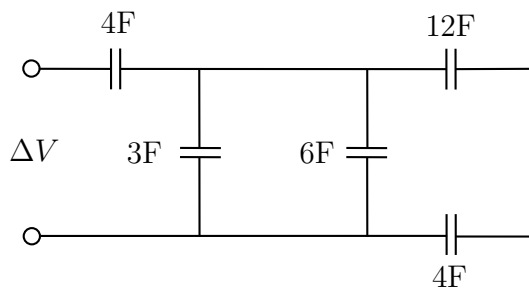


Figura 4.7. Sistema con capacitancias

Solución

Las capacitancias de 12 F y 4 F están en serie, su equivalente es $C = 3$ F. Esta capacitancia de 3 F está en paralelo con una de 6 F y otra de 3 F, dando una equivalente de 12 F. Finalmente quedan una capacitancia de 4 F y otra de 12 F en serie, dando la equivalente final de 3 F.

Ejemplo 2. Considere el circuito mostrado en la figura 4.8. El voltaje en la fuente es de 20 V. Determine: la carga, el voltaje y la energía almacenada para cada condensador y registre los valores encontrados en la tabla.

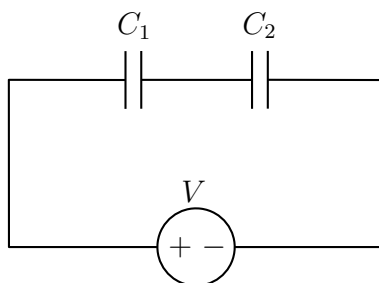


Figura 4.8. Condensadores en serie

Condensador	Capacitancia (μF)	Carga (C)	Voltaje (V)	Energía (J)
C_1	10			
C_2	5			

Solución

Aunque no necesariamente se siguen los pasos de manera rigurosa, se seguirá un orden lógico que va acorde con los pasos enunciados:

1. Se determina que la combinación de capacitores está en serie. Sus capacitancias son $10\mu\text{F}$ y $5\mu\text{F}$ y a su vez están conectados en serie con una fuente de 2 V.
2. Se determina la capacitancia equivalente teniendo en cuenta que en una combinación serie la capacitancia equivalente es el inverso de los inversos de las capacitancias originales, entonces

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{10 \mu\text{F}} + \frac{1}{5 \mu\text{F}} = 0,1 \mu\text{F}^{-1} + 0,2 \mu\text{F}^{-1} = 0,3 \mu\text{F}^{-1}$$

$$C_{eq} = 3,33 \times 10^{-6} \text{ F} \quad (4.9)$$

3. Con el circuito formado por una capacitancia equivalente y una fuente se puede calcular la carga Q de esta capacitancia, que será igual a la carga de los condensadores C_1 y C_2 , quedando:

$$Q = C_{eq}\Delta V = 3,33 \times 10^{-6} \text{ F (20 V)}$$

$$Q = 6,66 \times 10^{-5} \text{ C} = Q_1 = Q_2$$

4. Con estas cargas conocidas se pueden determinar los voltajes en cada uno de los condensadores, siguiendo la ecuación:

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{6,66 \times 10^{-5} \text{ C}}{10\mu\text{F}} = 6,67 \text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{6,66 \times 10^{-5} \text{ C}}{5\mu\text{F}} = 13,33 \text{ V}$$

5. La energía almacenada en cada condensador se puede encontrar aplicando la fórmula:

$$U_1 = \frac{Q_1\Delta V_1}{2} = \frac{(6,66 \times 10^{-5} \text{ C})(6,67 \text{ V})}{2} = 2,22 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$U_2 = \frac{Q_2\Delta V_1}{2} = \frac{(6,66 \times 10^{-5} \text{ C})(13,33 \text{ V})}{2} = 4,44 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Así, la tabla es:

Condensador	Capacitancia (μF)	Carga (C)	Voltaje (V)	Energía (J)
C_1	10	$Q = 6,66 \times 10^{-5}$	6,67	$2,22 \times 10^{-4}$
C_2	5	$Q = 6,66 \times 10^{-5}$	13,33	$4,44 \times 10^{-4}$

4.6. Ejercicios

1. Verifique que la capacitancia de un capacitor de esferas concéntricas de radios internos y externos a y b , respectivamente, con un dieléctrico de constante K viene dada por $C = \frac{4\pi K ab}{b-a}$.
2. Para darse cuenta de que 1 F es un valor de capacitancia inmenso, considere el siguiente sistema: se tienen dos placas paralelas de área desconocida separadas una distancia de 1 mm con un dieléctrico de constante $K = 10$. Calcule cuál debe ser el área de las placas para lograr la capacitancia indicada.

3. Suponga que un capacitor de placas paralelas de área A y separación entre las placas d se llena con dos dieléctricos de constantes K_1 y K_2 . El área de las placas de los dos materiales es la misma, pero cada uno tiene un grosor de $d/2$, de manera que si se colocan uno sobre otro, llenan todo el espacio intermedio. Calcule la capacitancia de este sistema.
4. Si se conectan dos capacitores en paralelo, se obtiene una capacitancia equivalente igual a 12 pF ; si los mismos capacitores se conectan en serie, se obtiene una capacitancia equivalente de $2,25 \text{ pF}$. Encuentre la capacitancia de cada uno de ellos.
5. Calcule la capacitancia equivalente del sistema mostrado en la figura 4.9.

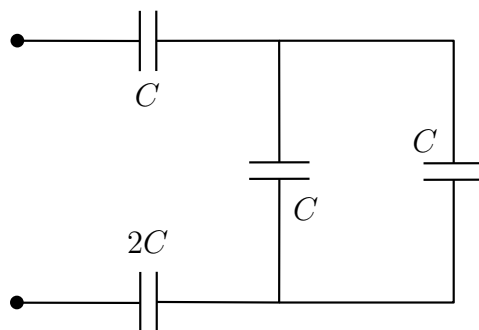


Figura 4.9. Ejercicio 5

6. Calcule la capacitancia equivalente del sistema mostrado en la figura 4.10 si $C = 70 \text{ nF}$.

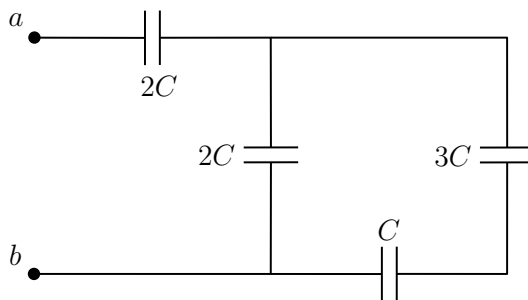


Figura 4.10. Ejercicio 6

7. Considere el siguiente circuito mostrado en la figura 4.11. El voltaje de la fuente es de 6 V . Registre los valores encontrados de la carga, voltaje y energía almacenada en la tabla con sus respectivas unidades.

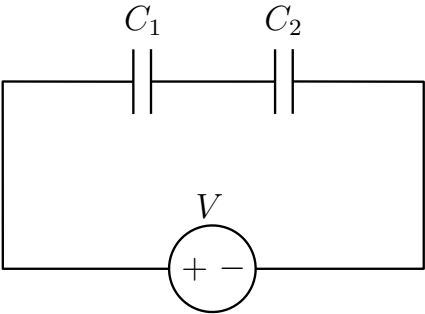


Figura 4.11. Ejercicio 7

Condensador	Capacitancia (μF)	Carga (C)	Voltaje (V)	Energía (J)
C_1	23			
C_2	9			

8. Considere el siguiente circuito mostrado en la figura 4.12. El voltaje de la fuente es de 35 V. Registre los valores encontrados de la carga, voltaje y energía almacenada en la tabla con sus respectivas unidades:

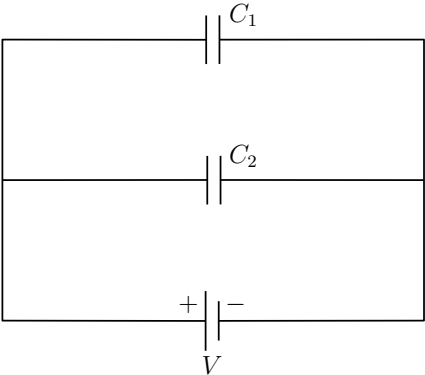


Figura 4.12. Ejercicio 8

Condensador	Capacitancia (μF)	Carga (C)	Voltaje (V)	Energía (J)
C_1	12			
C_2	5			

9. Considere el circuito mostrado en la figura 4.13. El voltaje de la fuente es de 12 V. Registre los valores encontrados de la carga, voltaje y energía almacenada en la tabla con sus respectivas unidades:

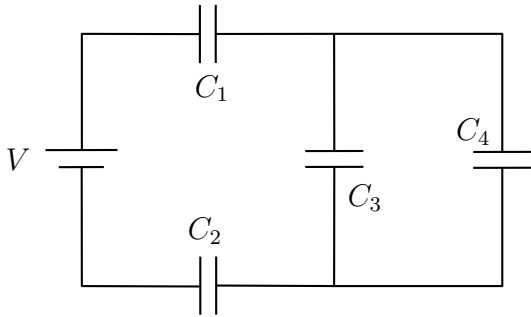


Figura 4.13. Ejercicio 9

Condensador	Capacitancia (μF)	Carga (C)	Voltaje (V)	Energía (J)
C_1	6			
C_2	4			
C_1	3			
C_2	8			

10. Considere el siguiente circuito mostrado en la figura 4.14. El voltaje de la fuente es de 10 V y se tiene $C_1 = 3,5 \mu\text{F}$, $C_2 = 5,4 \mu\text{F}$, $C_3 = 6,8 \mu\text{F}$, $C_4 = 7,2 \mu\text{F}$ y $C_5 = 7,6 \mu\text{F}$. Encuentre la carga eléctrica en el condensador C_3 :

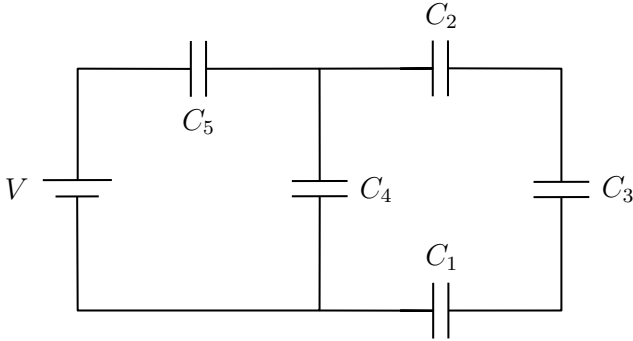


Figura 4.14. Ejercicio 10

11. El circuito que se ilustra en la figura 4.15 se conecta a una diferencia de potencial de 10 V entre los puntos a y b . Calcule:
- Los valores correspondientes de voltaje, carga y diferencia de potencial de cada uno de los condensadores.
 - La energía total almacenada en el circuito.

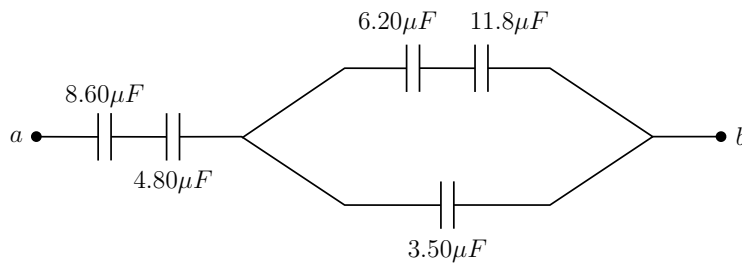


Figura 4.15. Ejercicio 11

LA CORRIENTE ELÉCTRICA Y LAS LEYES DE KIRCHHOFF

5.1. Corriente eléctrica

Se ha estudiado la física de cargas en reposo en los últimos capítulos y ahora en este se abordará el efecto de las cargas en movimiento que dan origen a la corriente eléctrica. Las aplicaciones de la corriente eléctrica están presentes en muchas profesiones tales como ingeniería, biología, meteorología y otra más. La ingeniería eléctrica tiene que ver con sistemas eléctricos, sistemas de potencia, sistemas de iluminación, sistemas de almacenamiento de información, sistemas musicales, etc. Es ahora tiempo de discutir la base de la física de la corriente eléctrica y por qué fluye en algunos materiales y en otros no.

La corriente eléctrica es un flujo de cargas en movimiento, pero no todas las cargas en movimiento constituyen una corriente eléctrica. Debe existir un flujo neto de cargas a través de una superficie, como, por ejemplo, los electrones libres en un alambre de cobre, los cuales se mueven pasando en ambas direcciones por un área de sección transversal del alambre. Los electrones pasan por ella en cantidades de muchos millones en tan solo un segundo, pero no hay una transferencia neta de carga y, por lo consiguiente, no hay corriente eléctrica a través del alambre. Si se conectan los extremos del alambre a una batería, los electrones fluirán en una dirección de manera que existirá un transporte de carga neta y una corriente eléctrica por el alambre.

El flujo de agua en una manguera de jardín representa un flujo de carga positiva a una razón de varios millones de coulomb por segundo, pero *no hay transporte neto* de carga; sin embargo, hay un flujo paralelo de carga negativa de la misma cantidad moviéndose en la misma dirección.

Si un diferencial de carga dq pasa a través de un área de sección transversal en un diferencial de tiempo dt , la corriente I a través del área se define como:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (5.1)$$

Por integración se puede encontrar la carga que pasa por el área de sección transversal en un intervalo de tiempo desde 0 hasta t :

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt \quad (5.2)$$

donde la corriente $I(t)$ puede variar con el tiempo.

En el sistema internacional SI las unidades para la corriente son Coulomb (C) sobre segundo (s) o Amperio (A).

La corriente definida por la ecuación (5.2) es una cantidad escalar ya que la carga y el tiempo así lo son. Se acostumbra representar la corriente con una flecha para indicar que la carga está en movimiento a pesar de no ser una cantidad vectorial. La flecha solamente indica una dirección o flujo a lo largo de un conductor.

5.1.1. Densidad de corriente

Aunque algunas veces se tiene interés en la corriente sobre un conductor, otras veces nos interesa estudiar el flujo de carga a través de la sección transversal de un conductor en un determinado punto. Para describir este flujo, se usa la densidad de corriente \vec{J} , la cual tiene la misma dirección que la velocidad de las cargas en movimiento si son positivas y la dirección contraria si fueran negativas. La magnitud de la densidad de corriente \vec{J} es igual a la corriente por unidad de área a través de cualquier sección transversal. Si la corriente es constante, entonces:

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{n} \quad (5.3)$$

Donde A es el área de la superficie en dirección \hat{n} . Las unidades para la densidad de corriente en el SI son amperios por metro cuadrado (A/m^2). Aunque la corriente no cambie, la densidad de corriente J puede variar, ésta será mayor en un conductor más delgado que en un conductor grueso.

Cuando un conductor transporta una corriente, las cargas se mueven al azar con una velocidad conocida como velocidad de arrastre v_d . Esta velocidad es más pequeña que las velocidades al azar de las cargas. Se supone que todas las cargas se mueven con la misma velocidad v_d y que la magnitud de la densidad de corriente J es constante a través de una sección transversal de un alambre A . El número de portadores de carga en una longitud L del alambre será nAL , donde n es el número

de portadores de carga por unidad de volumen. Entonces la carga total Q de los portadores en la longitud L , siendo q la carga de cada portador, será:

$$Q = nALq$$

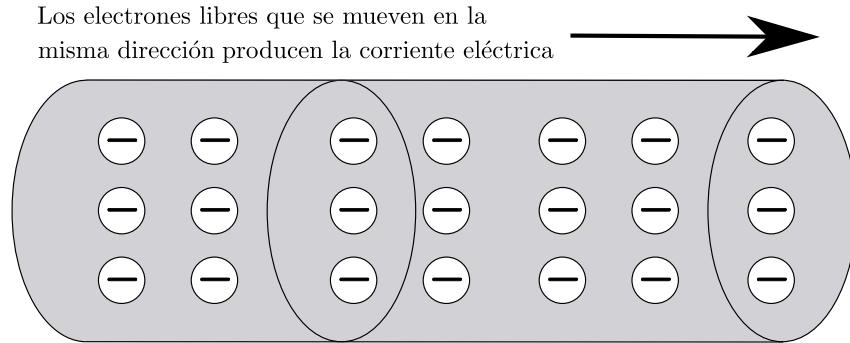


Figura 5.1. Cargas dentro del conductor

Como los portadores se mueven con la misma velocidad v_d , la carga total se mueve por la sección transversal en un tiempo $t = L/v_d$. Así que la corriente I , igual a la transferencia de carga a través de la sección transversal, es:

$$I = \frac{Q}{t} = nAqv_d$$

Despejando v_d y reemplazando $J = I/A$, se tiene $v_d = I/nAq = J/nq$, de donde se obtiene:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \quad (5.4)$$

donde \vec{J} tiene la misma dirección de la velocidad para cargas positivas y contraria para cargas negativas.

5.2. Resistencia y ley de Ohm

5.2.1. Resistencia

La resistencia, normalmente simbolizada como R , es un elemento muy importante en el estudio de circuitos eléctricos. Este es un elemento pasivo, cuyo propósito es oponerse al flujo de corriente a través de una sección determinada en el circuito. Sus unidades en el SI son los Ohmios (Ω). El valor deseado de una resistencia eléctrica puede ser obtenido en su proceso de construcción, manipulando los parámetros de

su geometría y composición química; por ejemplo, existen resistencias de películas de óxidos de metales, películas de carbón, hilos metálicos enrollados o embobinados, entre otras. El valor de la resistencia se puede obtener como:

$$R = \frac{\rho L}{A} \quad (5.5)$$

donde ρ es un parámetro llamado resistividad eléctrica, cuyas unidades son $\Omega \cdot \text{m}$. Este valor es característico de la composición química del material que constituye la resistencia y depende de la temperatura (algunos valores a 20°C : $\rho_{\text{plata}} = 1,47 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_{\text{cobre}} = 1,72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_{\text{oro}} = 2,44 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\rho_{\text{madera}} = 1 \times 10^8 \Omega \cdot \text{m}$). Adicionalmente, L es la longitud del material y A es el área transversal de este.

A partir de la ecuación (5.5) se puede deducir que la resistencia eléctrica aumenta proporcionalmente con ρ y L ; mientras que disminuye con el aumento de su sección transversal A , siempre que esta sea uniforme. Se puede entender la resistividad eléctrica ρ como el grado de oposición intrínseca que presenta un material determinado (dependiendo solo de la estructura interna o naturaleza química, mas no de la geometría) al paso de electrones a través de su estructura.

Se puede entender la resistencia haciendo una analogía con el tráfico a lo largo de una carretera. Entre mayor sea el tráfico, mayor la resistencia. Acá ρ estaría relacionado con la calidad de la carretera; si esta es de mala calidad (posee muchos huecos, por ejemplo), el tráfico será mayor. Si L es grande, significa que la carretera es muy larga y así el tiempo que le toma a un carro llegar a su destino es mayor. Por otro lado, una carretera con muchos carriles estaría relacionado a un área grande, haciendo que el tráfico sea más suave.

Normalmente, los metales poseen una baja resistividad, mientras que los aislantes poseen una buena resistividad (al menos a temperatura ambiente). En algunas situaciones se puede definir un parámetro inverso a la resistividad llamado conductancia y simbolizado como σ , el cual se relaciona con la resistividad como:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (5.6)$$

En este caso, las unidades de la resistividad serían $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Como la conductancia es inversa a la resistividad, son los metales los que poseen una alta conductividad, mientras que los aislantes poseen una baja conductividad.

5.2.2. Ley de Ohm

La ley de Ohm establece una relación entre la corriente que atraviesa una resistencia y el voltaje necesario para que esto ocurra, la cual toma la forma $V = IR$. Esta

relación ha sido obtenida de forma experimental mediante el análisis de datos en un laboratorio. No obstante, la ley de Ohm puede ser reformulada adquiriendo una relación más conceptual, la cual relaciona la densidad de corriente, la conductividad del sistema y el campo eléctrico que genera el movimiento de las cargas. En esta versión, la densidad de corriente y el campo eléctrico son proporcionales, siendo la constante de proporcionalidad la conductividad definida en la la relación (5.6).

En otras palabras:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (5.7)$$

Ahora, si se supone que el campo eléctrico a lo largo de un conductor de longitud L es constante, su diferencia de potencial es EL . Juntando ahora las ecuaciones (5.5) y (5.6) se puede deducir que $\sigma = \frac{L}{AR}$. Como $E = \frac{V}{L}$ y $J = \frac{I}{A}$, la ecuación (5.7) toma la forma (tomando la componente en la dirección en que mueve la carga):

$$V = IR \quad (5.8)$$

La cual es la relación que se conoce como ley de Ohm. Algo importante que se debe mencionar es que la relación $V = IR$ siempre es cierta. Lo que dice la ley de Ohm es que el voltaje y la corriente son proporcionales en un material óhmico; en otras palabras, R es constante. Sin embargo, en muchos materiales R no lo es.

Como se acaba de mencionar, la resistividad ρ y, por tanto, la resistencia R dependen de la temperatura. En un material óhmico la resistencia no varía de manera significativa a medida que el material se calienta; este es el caso de los materiales cilíndricos con colores que se usan para armar circuitos. Como R es constante en este tipo de materiales, una gráfica V Vs I describe una línea recta. No obstante, un bombillo, por ejemplo, se calienta de manera significativa cuando la corriente aumenta, lo que hace que la resistencia se incremente a medida que la corriente lo hace; esto implica que un bombillo no es un material óhmico (los diodos tampoco son óhmnos, pero la curva descrita es muy distinta). La forma de la curva para materiales óhmnos y algunos materiales no óhmnos (bombillos incandescentes, en este caso) se puede visualizar en la figura 5.2.

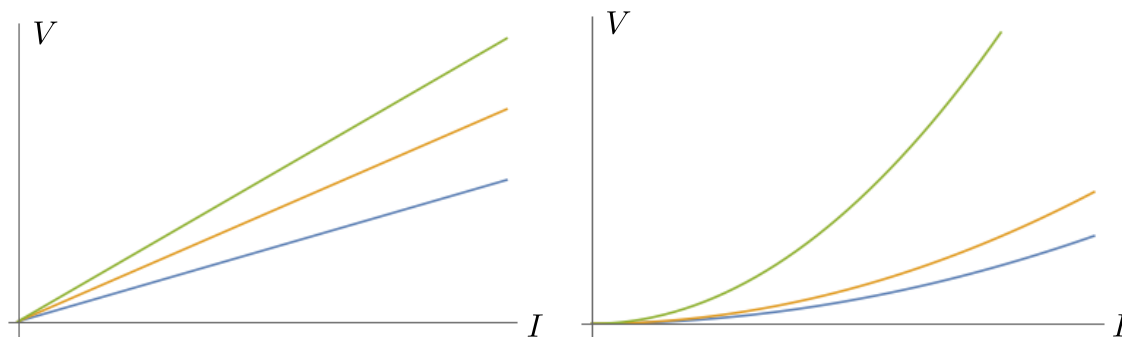


Figura 5.2. Izquierda: curvas descritas por materiales óhmnicos. Derecha: curvas descritas por algunos materiales no óhmnicos, típicamente bombillos incandescentes.

5.3. Combinaciones de resistencias en serie y en paralelo

5.3.1. Resistencias en serie

La figura 5.3 muestra dos resistencias en serie conectadas a una batería ideal. En serie quiere decir que las resistencias están conectadas una después de la otra y que la diferencia de potencial ΔV se aplica a los dos extremos de la serie. La diferencial de potencial que existe en el circuito produce una corriente eléctrica I en ellas.

Lo que realmente define que dos resistencias estén conectadas en series es que ambas tengan la misma corriente.

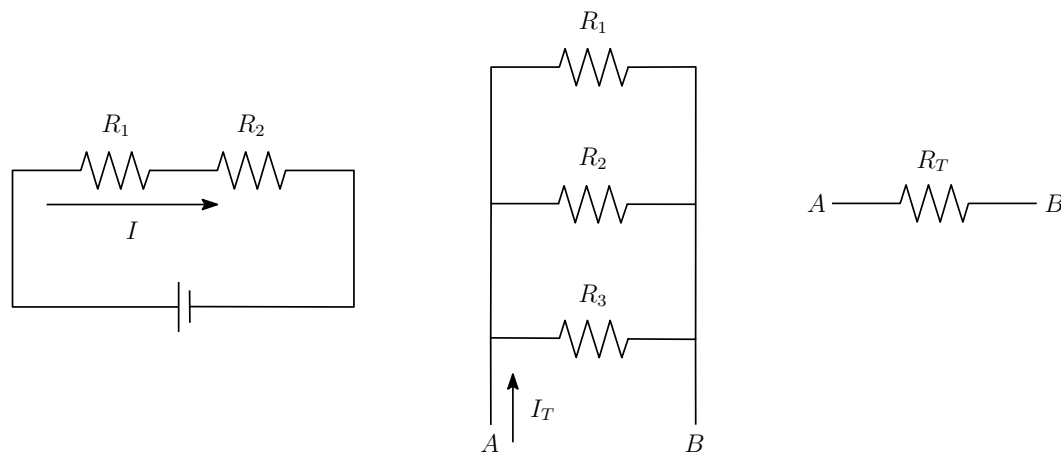


Figura 5.3. Izquierda: dos resistencias en serie. Centro: tres resistencias en paralelo. Derecha: Resistencia equivalente entre los puntos A y B

Cuando una diferencia de potencial ΔV se aplica a resistencias en serie, la corriente que pasa por ellas es la misma y la suma de las diferencias de potencial de las resistencias es igual a la diferencia de potencial aplicada. Las resistencias conectadas en serie se pueden reemplazar con una resistencia equivalente que tiene la misma corriente I y la misma diferencia de potencial ΔV . Por esta razón, se puede decir que:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 = I(R_1 + R_2)$$

Como, por definición, $\Delta V = I R_{eq}$, se puede decir entonces que $R_{eq} = R_1 + R_2$. En general, si n resistencias se conectan en serie, se tiene la resistencia equivalente:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (5.9)$$

5.3.2. Resistencias en paralelo

La figura 5.3 también muestra tres resistencias en paralelo conectadas a una diferencia de potencial entre los puntos A y B. En paralelo significa que unos extremos de las resistencias están conectados juntos en un punto, y que los otros extremos de las resistencias están conectados juntos en otro punto. Lo que realmente define que dos o más resistencias estén conectadas en paralelo es que la caída de potencial en estas es la misma. De esta manera, las tres resistencias tienen la misma diferencia de potencial ΔV entre sus extremos, produciéndose una corriente particular en cada una de ellas.

Como se ha mencionado, cuando una diferencia de potencial ΔV es aplicada a varias resistencias en paralelo, todas las resistencias tienen la misma diferencia de potencial ΔV . No obstante, la corriente equivalente o producida por la batería, I_T , es la suma de las corrientes que pasan por las tres resistencias.

Como $I = \frac{V}{R}$, se tiene que:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3}$$

Como, por construcción, $I_I = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$ se tiene que $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. En general, si n resistencias se conectan en paralelo, su equivalente es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (5.10)$$

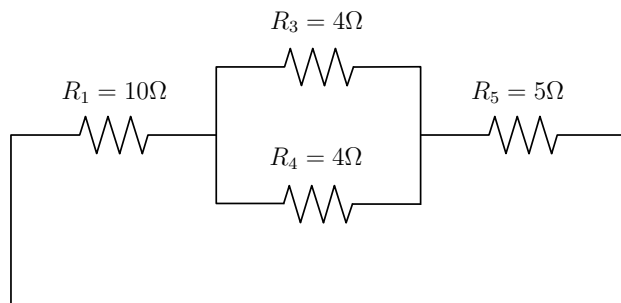
5.3.3. Estrategia de solución de ejercicios y problemas

La reducción de circuitos que contienen resistencias es muy similar a la reducción de circuitos que contienen capacitancias. Algunos pasos sugeridos son los siguientes:

1. Lea y comprenda el enunciado y con base en esta información plantee lo que le están preguntando.
2. Si es posible realice un esquema del sistema.
3. Identifique las variables o parámetros tanto conocidos como desconocidos del ejercicio.
4. Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades.
5. Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.
6. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.
7. Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado.

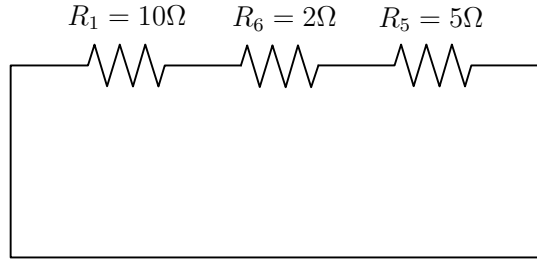
Se mostrará un ejemplo para aplicar estos conceptos.

Ejemplo 1. En la figura inferior, la diferencia de potencial es de 10 V entre los dos extremos. Halle la resistencia equivalente y la corriente que pasa por cada resistencia.

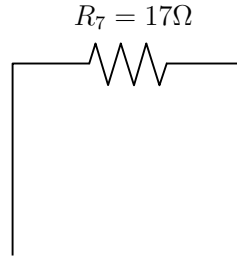


Solución

Primero se nota que los resistores R_3 y R_4 se encuentran en paralelo y su equivalente es: $R_6 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 2\Omega$. Esto genera el siguiente circuito:



Ahora las resistencias R_1 , R_6 y R_5 están conectadas en serie, por lo que la resistencia equivalente es igual a $R_{eq} = R_1 + R_6 + R_5 = 17\Omega$. El circuito es análogo entonces al mostrado en la parte inferior:



La corriente que pasa por el circuito equivalente es igual a $I = V/R_{eq} = 0,59\text{ A}$.

Ahora, la corriente que pasa por las resistencias R_1 , R_6 y R_5 es igual a la del circuito equivalente, ya que están en serie; en otras palabras, $I_1 = I_6 = I_5 = 0,59\text{ A}$.

Para conocer las corrientes que pasan por las resistencias R_3 y R_4 , se debe conocer el voltaje de la combinación en paralelo que se obtiene restando del voltaje entre los extremos los voltajes en las resistencias R_1 y R_5 (esto será más claro cuando se vean las leyes de Kirchhoff).

$$\text{Así, } V_6 = 10V - V_1 - V_5 = 10V - I_1 R_1 - I_5 R_5 = 1,15\text{ V}.$$

Este voltaje es el mismo para las resistencias R_3 y R_4 que se hallan en paralelo. Las corrientes que pasan por estas resistencias son: $I_3 = 1,15\text{ V}/R_3 = 1,15\text{ V}/4\Omega = 0,29\text{ A}$ e $I_4 = 1,15\text{ V}/R_4 = 1,15\text{ V}/4\Omega = 0,29\text{ A}$, las cuales son iguales porque las resistencias R_3 y R_4 también lo son, aunque esto no es la regla general.

5.4. Circuitos eléctricos

Un circuito eléctrico es un sistema formado por varios elementos eléctricos por el cual se desplazan las cargas eléctricas. Esta carga eléctrica es generada por una fuente de potencial eléctrico (normalmente conocida como batería), y es justamente el desplazamiento de esta carga eléctrica la encargada de alimentar los diferentes componentes del circuito.

Aunque existen muchos elementos que pueden componer un circuito: diodos, circuitos integrados, transistores, etc., en esta cartilla el enfoque principal será el estudio de circuitos compuestos por fuentes de voltaje, resistencias y capacitancias. Mientras que las capacitancias fueron estudiadas en detalle en el capítulo anterior, las resistencias fueron introducidas en este capítulo y su estudio se profundizará más adelante. La función principal de una capacitancia es almacenar energía en forma de campo eléctrico. Las resistencias cumplen la función de disipar energía, la cual puede ser utilizada para el funcionamiento de hornos, planchas y otros electrodomésticos que generen calor. Como el lector podrá inferir, un circuito no puede funcionar sin la presencia de una batería, ya que esta proporciona la energía necesaria para que funcione. El tipo de baterías usadas se pueden dividir en dos clases:

- *Batería de voltaje constante (DC)*. Son aquellas donde la batería siempre genera el mismo voltaje, el cual no cambia a lo largo del tiempo. Ejemplo de esto son las pilas AA, las cuales generan un voltaje constante de 1,5 V. En las prácticas de laboratorio también se pueden usar unas fuentes rectangulares mucho más grandes, que pueden generar un voltaje máximo de 20 V.
- *Baterías de voltaje alterno (AC)*. Son aquellas que sí varían con el tiempo y su forma es generalmente descrita por funciones tipo seno o coseno (en algunas ocasiones hay señales cuadradas o incluso triangulares). La fuente que normalmente se usa en nuestras casas para alimentar los electrodomésticos cabe dentro de esta categoría; la señal de la corriente producida típicamente oscila con una frecuencia de 60 Hz.

5.4.1. Algunos nombres comúnmente usados en el análisis de circuitos

- *Circuito eléctrico*: es el camino continuo, formado por varios elementos, por donde circula una corriente eléctrica.
- *Fuente de voltaje*: es un elemento activo que genera la energía que alimenta el circuito. Este elemento produce una fuerza electromotriz capaz de generar una diferencia de potencial en el circuito.
- *Fuerza electromotriz \mathcal{E}* : mecanismo capaz de mantener un voltaje entre dos puntos. Es importante diferenciar la fuerza electromotriz y el voltaje terminal ΔV , las cuales se relacionan a través de la fórmula $\Delta V = \mathcal{E} - Ir$. Acá r es la resistencia interna de la batería e I es la corriente que fluye a través de esta. Aunque la batería genera cierta fuerza electromotriz, puede existir resistencia interna que disipa algo de energía, y el voltaje efectivo producido es ΔV . Note que sin resistencia interna $\Delta V = \mathcal{E}$; a esto se le considera una batería ideal.

- *Corriente eléctrica I* : es el flujo de cargas eléctricas a lo largo del tiempo que recorre un camino cerrado que compone el circuito.
- *Resistencia R* : oposición que ejerce un material al paso de una corriente eléctrica.
- *Resistor*: componente eléctrico que posee una resistencia determinada de valor R .
- *Conductor*: es la porción de cable metálico que posee una resistencia insignificante, lo cual permite el flujo de las cargas eléctricas sin mayor oposición de un lugar a otro.
- *Rama*: es la porción de un circuito que conecta dos nodos.
- *Nodo*: es un punto donde se cruzan o encuentran dos o más ramas.
- *Malla*: cualquier camino cerrado dentro de un circuito eléctrico.

5.5. Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff son dos leyes que describen el comportamiento del voltaje a lo largo de las mallas y la corriente entre los nodos (de un circuito) y fueron formuladas por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff. Estas leyes fueron planteadas en 1845 y se pueden resumir de la siguiente forma:

5.5.1. Primera ley o ley de nodos

En cualquier nodo de un circuito la suma de la corriente que entra a este es igual a la suma de las corrientes que salen de él.

Lo anterior se puede escribir matemáticamente de la siguiente forma:

$$\sum I_{entran} = \sum I_{salen} \quad (5.11)$$

5.5.2. Segunda ley o ley de mallas

En cualquier malla o camino cerrado la suma de todos los voltajes a lo largo de este es igual a cero:

$$\sum V_{malla} = 0 \quad (5.12)$$

Resulta importante definir una convención de signos para aplicar estas leyes (estas convenciones se explican más adelante).

Es útil recordar que el voltaje y la resistencia están relacionados a partir de la ley de Ohm:

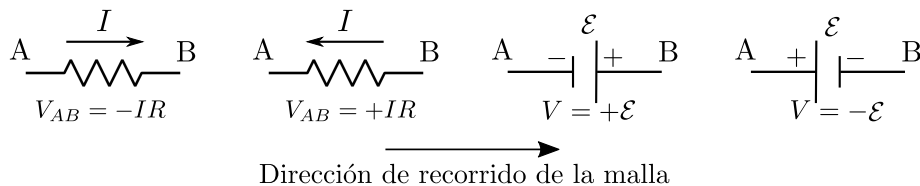
$$V = IR \quad (5.13)$$

Adicionalmente, otro concepto útil en el manejo de circuitos es el de potencia. Es la energía disipada por unidad de tiempo en algún componente del circuito y se mide en vatios (W). Un vatio es el producto de un voltio y un amperio, o $[W] = [V \cdot A]$. Las ecuaciones para la potencia están dadas por:

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (5.14)$$

5.5.3. Estrategia de solución de ejercicios y problemas

1. Identifique los nodos del circuito.
2. Localice las resistencias del circuito y a cada una asígnele una corriente. Escoja la dirección de cada corriente y tenga cuidado en siempre respetar esta dirección.
3. A cada nodo aplíquelo la primera ley de Kirchhoff, ecuación (5.11), identificando las corrientes que entran y que salen. Una corriente entra cuando la flecha se dirige hacia el nodo y sale cuando se aleja del nodo. Las flechas determinan la dirección de cada corriente, la cual fue escogida en el punto anterior.
4. Escoja una malla y recórrela en cierta dirección (esta dirección es arbitraria pero se debe mantener una vez se escoja). Comenzando desde un punto arbitrario, identifique los diferentes componentes que generan potencial (baterías, $V = \mathcal{E}$) o consumen potencial (resistencias, $V = IR$). El signo que se le asigna a cada voltaje depende de las direcciones escogidas; acá se muestra la convención utilizada al ir desde el punto A al punto B:



5. Estudie la cantidad de mallas y nodos que necesite hasta completar un sistema de n ecuaciones (cada ecuación proporcionada por el análisis de un nodo o una malla) y n incógnitas (las corrientes del circuito, o en algunos casos los voltajes de algunos componentes). Solucione el sistema mediante alguno de los métodos aprendidos en el curso de álgebra lineal (reducción de Gauss-Jordan, regla de Cramer, etc.).

6. Use la información acabada de encontrar para resolver las preguntas del problema.

Ejemplo 1. Usando el circuito mostrado en la figura 5.4 como base, calcule: (a) la resistencia equivalente del circuito, (b) la corriente que circula por cada una de las resistencias, (c) la potencia disipada por cada resistencia y (d) la potencia disipada por la batería.

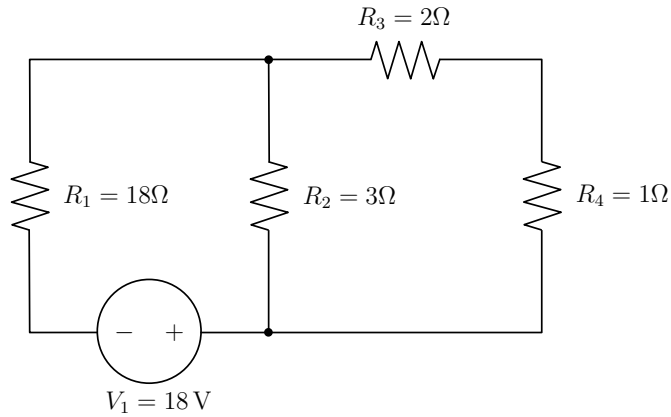


Figura 5.4. Ejemplo 1

Solución

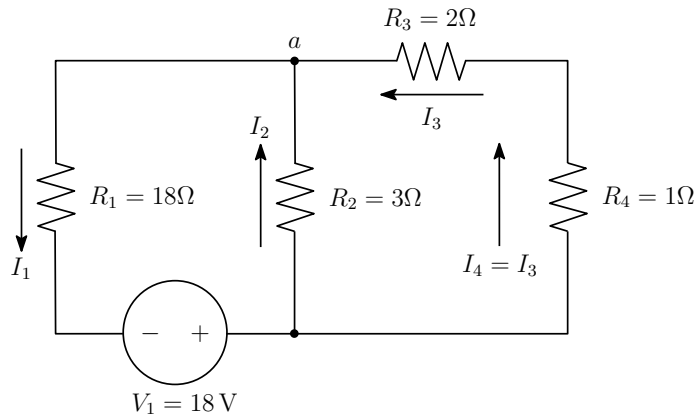


Figura 5.5. Ejemplo 1: dirección de las corrientes

- (a) Siguiendo las reglas de suma de resistencias en serie y paralelo, se deja al lector verificar que la resistencia equivalente es $R_{eq} = 19,5\,\Omega$. Con esta información se

determina que la corriente equivalente del circuito producida por la batería es $I = V_1/R_{eq} = 0,92$ A. Note que la resistencia 1 está en serie con la batería, así su corriente es la misma de la batería, $I_1 = 0,92$ A.

- (b) Ahora se define la malla 1 como aquella que conecta la batería, R_4 , R_3 y R_1 y se orienta en sentido antihorario; se escogen las direcciones de las corrientes como aquellas mostradas en la figura 5.5. Note que $I_3 = I_4$ al estar R_3 y R_4 en serie. Se deduce entonces que $V_1 - I_3 R_4 - I_3 R_3 - I_1 R_1 = 0$.

Despejando se encuentra $I_3 = \frac{V_1 - I_1 R_1}{R_3 + R_4} = 0,46$ A. Para hallar I_2 se analiza el nodo a notando que la ecuación de nodos implica que $I_3 + I_2 = I_1$ o $I_2 = I_3 - I_1 = 0,46$ A.

- (c) Una vez calculadas las corrientes, se usa la fórmula $P = I^2 R$ mostrada en la figura 5.14 para calcular las potencias, obteniendo $P_1 = I_1^2 R_1 = 15,2$ W, $P_2 = I_2^2 R_2 = 0,63$ W, $P_3 = I_3^2 R_3 = 0,42$ W y $P_4 = I_4^2 R_4 = 0,21$ W.
- (d) La potencia de la batería es $P = V_1 I = 16,5$ W. Note que $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 16,5$ W. Esto es de esperarse: toda la potencia generada por la batería se disipa en las resistencias.

Ejemplo 2. Determine el valor de la corriente que circula por cada uno de las resistencias del circuito que se muestra en la figura 5.6. Los valores de las resistencias están en ohmios y los de las fuentes están en voltios. Hallar además la potencia disipada por cada batería.

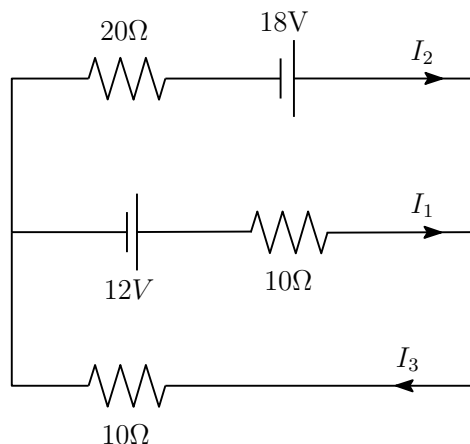


Figura 5.6. Ejemplo 2

Solución

Se comienza por definir dos mallas, ambas en dirección antihoraria: la primera sobre el pequeño rectángulo superior, la segunda sobre el rectángulo pequeño inferior. La primera malla genera la ecuación (voltajes en voltios, corrientes en amperios y resistencias en Ohmios) $12 - 10I_1 - 18 + 20I_2 = 0$; la segunda genera la ecuación $10I_3 + 10I_1 - 12 = 0$. Por otro lado, el nodo de la derecha implica que $I_1 + I_2 = I_3$. Esto se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 10 & -20 & 0 \\ 10 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

El sistema matricial anterior se puede resolver de varias maneras; por ejemplo, a través de la reducción de Gauss-Jordan. Se deja al lector solucionarlo y verificar que la solución es (en Amperios) $I_1 = \frac{9}{25}$, $I_2 = \frac{12}{25}$ e $I_3 = \frac{21}{25}$.

Para hallar la potencia disipada por cada batería, vemos primero que la corriente que pasa por la superior es I_2 ; su potencia es entonces $P = 18 \text{ V} \cdot \frac{12}{25} \text{ A} = 8,64 \text{ W}$. La corriente que pasa por la inferior es $I_1 + I_3 = \frac{6}{5} \text{ A}$, su potencia disipada es así $14,4 \text{ W}$.

5.6. Ejercicios

1. Suponga que usted posee cuatro resistencias de iguales de valor R . Hacer un esquema de al menos un circuito que use las cuatro resistencias y genere una equivalente de (a) $4R$, (b) $R/4$, (c) $4R/3$ y (d) R .
2. Considere el circuito mostrado en la figura 5.7 y determine: corriente, voltaje y potencia para cada resistor. Registre los valores encontrados en la tabla mostrada.

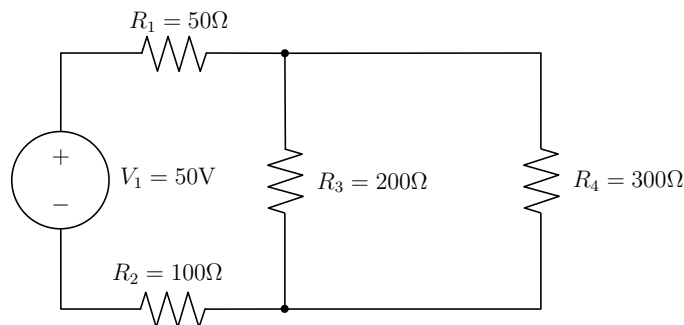


Figura 5.7. Ejercicio 2

3. Hacer lo mismo del ejercicio anterior para del circuito mostrado en la figura 5.8.

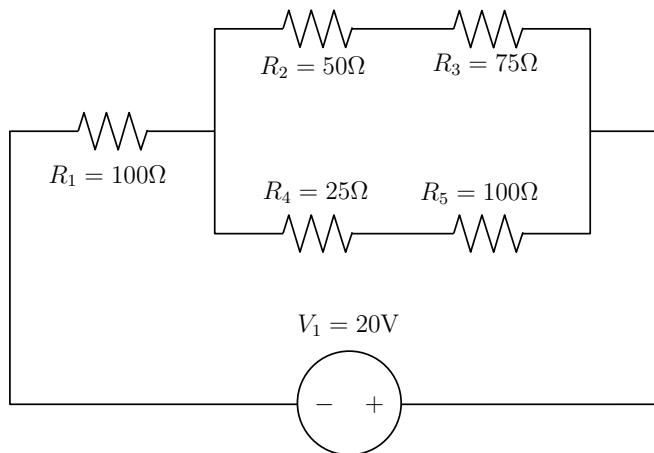


Figura 5.8. Ejercicio 3

4. Calcular la resistencia equivalente del ejercicio anterior; verificar que esta satisface la relación $R_{eq} = V_1/I_1$; explicar por qué se debe esperar este resultado.
5. En el circuito de la figura 5.9 se mide la corriente que pasa a través de la batería de 12,0 V y resulta ser de 70,6 mA en el sentido que se indica. Determinar:
 a) corriente circulante en cada malla (considere las tres en sentido antihorario);
 b) potencia disipada por la resistencia de 20Ω y c) la diferencia de potencial entre los puntos “a” y “b” (indique cuál de ellos está a mayor potencial).

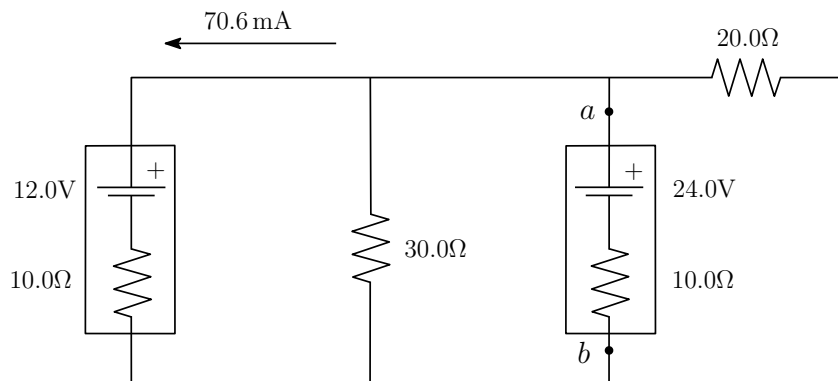


Figura 5.9. Ejercicio 5

6. Si $\mathcal{E}_1 = 35 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 65 \text{ V}$ y $\mathcal{E}_3 = 25 \text{ V}$, analice el circuito de la figura 5.10 usando las leyes de Kirchhoff y halle las corrientes, caídas de voltaje y potencias disipadas en cada resistencia. Use $R_1 = 120 \Omega$, $R_2 = 58 \Omega$ y $R_3 = 27 \Omega$.

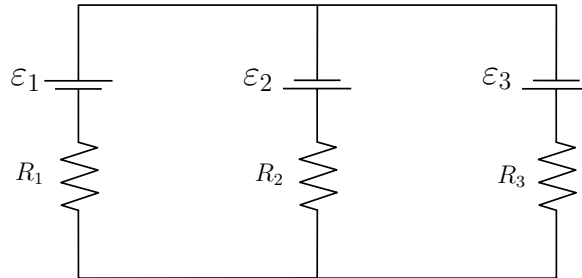


Figura 5.10. Ejercicio 6

7. En el circuito mostrado en la figura 5.11, encuentre la corriente, el voltaje y la potencia sobre cada resistor. El voltaje en la fuente es de 20 V y $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 30 \Omega$, $R_3 = R_4 = 10 \Omega$. Hágalo por dos caminos diferentes, a saber: a) reduciendo el sistema, teniendo en cuenta que algunas resistencias están en serie y otras en paralelo; b) aplicando las leyes de Kirchhoff.

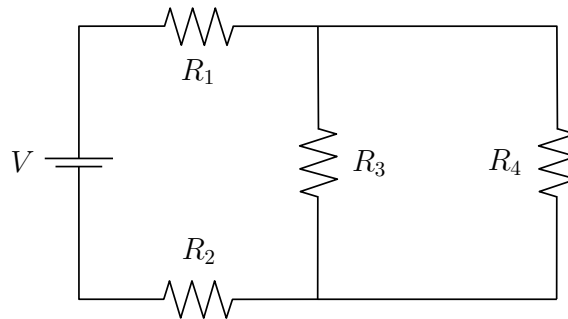


Figura 5.11. Ejercicio 7

8. Hacer lo mismo del ejercicio anterior para el circuito mostrado en la figura 5.12 si $\mathcal{E}_1 = 20 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 14 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$ y $R_3 = R_5 = 2 \text{ k}\Omega$.

Hacer además lo siguiente: a) calcule la potencia entregada por cada fuente, b) muestre que la potencia entregada por las fuentes es igual a la potencia disipada por las resistencias, c) si el circuito ha estado conectado durante 2 minutos, determine la energía entregada por cada batería.

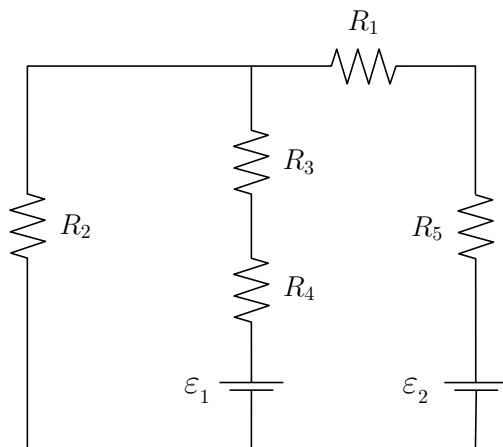


Figura 5.12. Ejercicio 8

9. En el circuito mostrado en la figura 5.13, calcule la dirección y magnitud de la corriente entre los puntos e y d . Utilice para ello las leyes de Kirchhoff. Nota: la respuesta debe quedar en términos de \mathcal{E} y R .

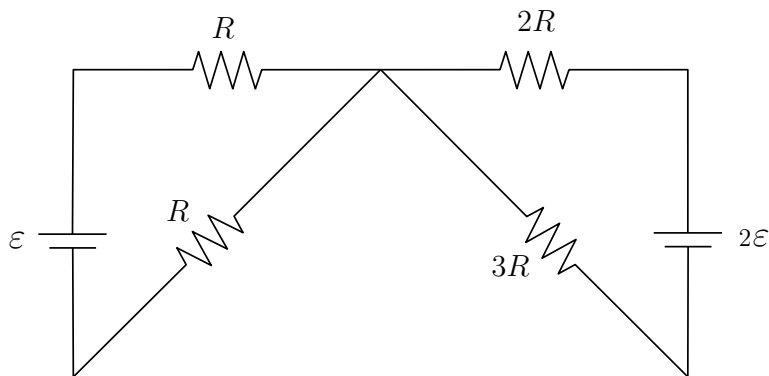


Figura 5.13. Ejercicio 9

10. Un dispositivo que permite mantener el valor de la corriente constante en un circuito se compone de un reóstato, que no es más que una resistencia variable, y una fuente de voltaje. Los valores de la resistencia y el voltaje se ajustan en cada momento para mantener la intensidad de la corriente constante. Se miden los valores de la resistencia; el voltaje en diferentes instantes y los datos obtenidos son mostrados en la tabla 5.1.

Tabla 5.1. Valores de resistencia y voltaje en un reóstato

$R (\Omega)$	380 ± 1	420 ± 1	550 ± 1	640 ± 1	830 ± 1	950 ± 1	1000 ± 1
$V (V)$	$9,4 \pm 2$	$10,4 \pm 2$	$13,6 \pm 2$	$15,8 \pm 2$	$20,8 \pm 2$	$23,6 \pm 2$	$25,0 \pm 2$

Hacer una regresión lineal para calcular la corriente que pasa por el reóstato y su incertidumbre.

FENÓMENOS MAGNÉTICOS

Los fenómenos magnéticos están presentes en la vida diaria, están inmersos en casi todo lo que representa tanto la tecnología pasada, presente y futura.

Probablemente la primera experiencia del lector con fenómenos magnéticos fue manipulando objetos que se atraen y repelen entre sí dependiendo de su orientación relativa. Tal vez fue en esta situación en la que el lector tuvo conciencia de que había una fuerza relacionada con estos objetos (los cuales se denominan imanes). Es natural pensar entonces que esta fuerza está asociada a la existencia de algo que se podría llamar positivo y su contraparte que se podría llamar negativo, así como se vio en el caso electrostático (capítulo 1).

Para entender los fenómenos magnéticos, es mejor empezar por describir las fuerzas que actúan sobre las partículas cargadas y sobre alambres conductores que transportan corrientes eléctricas. Posteriormente se hablará de cómo se produce el campo magnético y los fenómenos relacionados.

6.1. Fuerza magnética sobre cargas en movimiento

A diferencia de la fuerza eléctrica, la fuerza magnética no solamente necesita la existencia de carga, sino también que la carga esté en movimiento relativo con respecto a un campo magnético presente en la región y que su velocidad tenga una componente perpendicular a este. Pero, ¿qué es el campo magnético? En esta sección se tomará el campo magnético \vec{B} como una cantidad vectorial cuyas unidades son Teslas (T). Este estará presente en alguna región del espacio por donde transitan las cargas en movimiento, como se muestra en la figura 6.1; más adelante se discutirá sobre cuáles son las fuentes de campo magnético.

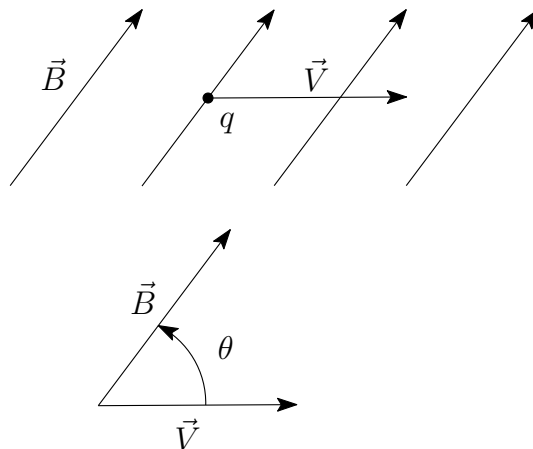


Figura 6.1. Carga q con velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético \vec{B}

Así, la fuerza magnética sobre una carga q que se mueve con una velocidad \vec{v} en presencia de un campo magnético uniforme \vec{B} , tal que estos dos vectores forman un ángulo θ , viene dada por la expresión:

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.1)$$

Observe que esta fuerza viene dada por un producto cruz, de tal manera que la fuerza resultante es perpendicular tanto a la velocidad como al campo magnético. Es decir, la fuerza magnética a diferencia de la fuerza eléctrica **NO** va en la misma dirección del campo magnético. Entonces, ¿cómo se determina la dirección de la fuerza? Esto se logra empleando la *regla de la mano derecha*. Para esto, tome los dedos índice, medio y pulgar de su mano derecha y ubíquelos de la siguiente manera: el índice en la dirección del vector velocidad \vec{v} , al mismo tiempo ubique el dedo medio o corazón en la dirección del campo magnético \vec{B} y como resultado el pulgar indica la dirección de la fuerza resultante \vec{F}_m , como muestra la figura 6.2.

Ahora bien, para determinar la magnitud de esta fuerza es necesario recordar que la magnitud del producto cruz entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} es $|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores. Por esta razón la magnitud de la fuerza magnética es:

$$|\vec{F}_m| = |q|vB \sin \theta \quad (6.2)$$

La ecuación (6.2) indica que la fuerza será máxima cuando la \vec{v} y \vec{B} sean perpendiculares ($\vec{v} \perp \vec{B}$) es decir, $\theta = \pi/2$. Por otro lado, si \vec{v} y \vec{B} son paralelos ($\vec{v} \parallel \vec{B}$) o

antiparalelos, $\theta = 0$ o π respectivamente, aun cuando la carga esté en movimiento, ésta **NO** experimentará una fuerza debida al campo magnético.

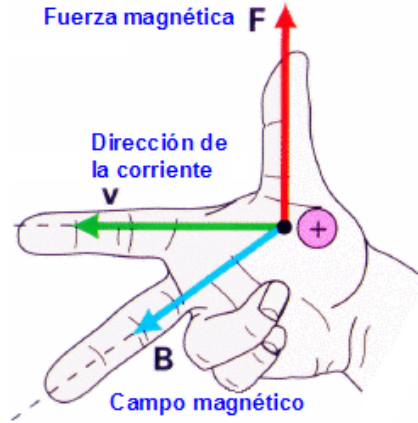


Figura 6.2. Regla de la mano derecha.

Fuente: <http://todoloqueseaverdad.blogspot.com/2014/07/los-mitos-de-la-razon-la-mano-derecha-y.html>

Por otro lado, la fuerza es un vector y como vector tiene componentes, así que, ¿cómo se determinan las componentes de la fuerza magnética? Esto se hace utilizando la definición de producto cruz entre dos vectores $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ y $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Empleando la ecuación (6.3), las componentes de la fuerza magnética son:

$$\begin{aligned} F_{mx} &= q(v_y B_z - v_z B_y) \\ F_{my} &= q(v_z B_x - v_x B_z) \\ F_{mz} &= q(v_x B_y - v_y B_x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

6.2. Movimiento de cargas en campos magnéticos constantes

Suponga ahora que una partícula con carga q positiva lleva una velocidad $\vec{v} = v \hat{i}$ y que el campo magnético está entrando en la hoja, como muestra la figura (6.3).

En este caso $\vec{v} \perp \vec{B}$, así que la fuerza magnética dada por la ecuación 6.2 se reduce a $F_m = qvB$.

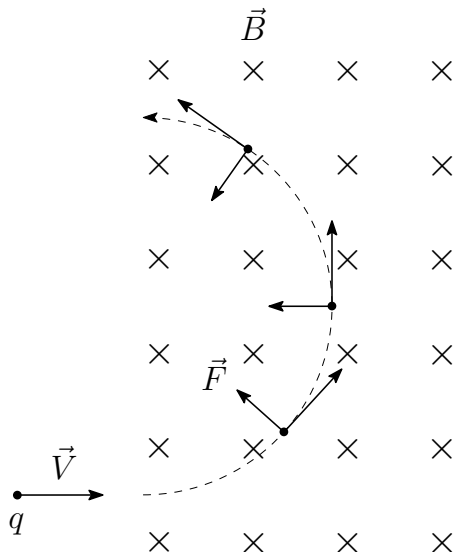


Figura 6.3. Carga entrando a un campo magnético uniforme.

Ahora bien, dado que en cada instante la partícula experimenta una fuerza perpendicular a la dirección de su velocidad, la carga sigue una trayectoria circular como se observa en la figura. Así, la fuerza magnética cumple la función de una fuerza centrípeta y por tal razón se pueden definir características de un movimiento circular.

Así, al considerar la segunda ley de Newton y recordar que la magnitud de la aceleración centrípeta viene dada por $a_c = v^2/R$, donde v es la rapidez del objeto en movimiento circular y R es el radio de giro, se tiene que:

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m \frac{v^2}{R} \hat{r} \quad (6.5)$$

Donde m es la masa de la partícula. Si se toma ahora solo la magnitud y se despeja el radio R , se tiene que:

$$\begin{aligned} |q|vB &= m \frac{v^2}{R} \\ R &= \frac{mv}{|q|B} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Observe que de acuerdo con la ecuación (6.6), a mayor masa o velocidad, la

trayectoria circular será mayor. Por el contrario, a mayor carga o a mayor intensidad del campo la trayectoria será más cerrada.

Por otro lado, al recordar que la relación entre la rapidez angular y la lineal es $v = \omega R$, se tiene que la ω para este movimiento circular es:

$$\omega = \frac{|q|B}{m} \quad (6.7)$$

Ahora bien, ¿importa el signo de las cargas en la fuerza magnética que experimentan? La respuesta es sí: si la carga es positiva, el movimiento será el descrito anteriormente, pero si por el contrario es negativa, la dirección de la fuerza y, por ende del movimiento rotacional será la opuesta; en otras palabras, las cargas positivas y las negativas al atravesar un campo magnético perpendicular experimentan un movimiento rotacional en direcciones opuestas.

6.3. Fuerza magnética sobre conductores

En la sección anterior se vio cuál es la fuerza que actúa sobre partículas cargadas en movimiento. Ahora bien, dado que se tiene corriente cuando hay cargas en movimiento, los alambres que están dentro de un campo magnético \vec{B} y que transportan una corriente I , como se muestra en la figura (6.4), van a experimentar una fuerza magnética:

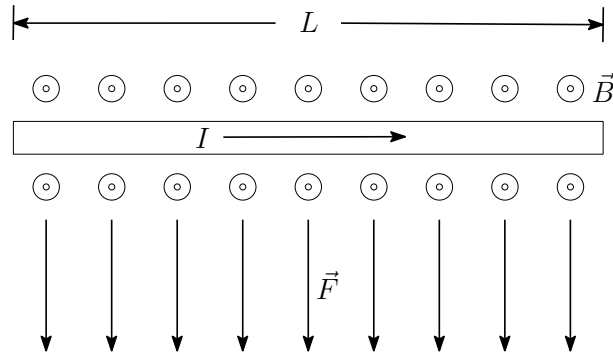


Figura 6.4. Conductor recto en presencia de un campo magnético

Recordando que la corriente se puede expresar en términos de la velocidad de deriva y de los portadores de carga como $I = nqAv_d$ y que cada carga experimentará una fuerza magnética F_m , entonces la fuerza que experimentará un alambre recto de longitud L y sección transversal A será:

$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = nALq\vec{v} \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad (6.8)$$

En la deducción anterior se tuvo en cuenta que n es el número de portadores de carga por unidad de volumen y el volumen del alambre es $V = AL$. Es importante discutir que la corriente usualmente se trabaja como un escalar, un número sin dirección. Como la corriente está contenida por el alambre, la dirección de la corriente es la misma del segmento de alambre, y es esta dirección en la cual se ubica el alambre la que justo llevará la dirección de la corriente.

Pero, ¿qué pasa si el alambre no es recto? Si este es el caso, se debe considerar que cada segmento del alambre de longitud dl , aunque transporta la misma corriente I , lo hace en una dirección que puede cambiar, tal como muestra la figura (6.4).

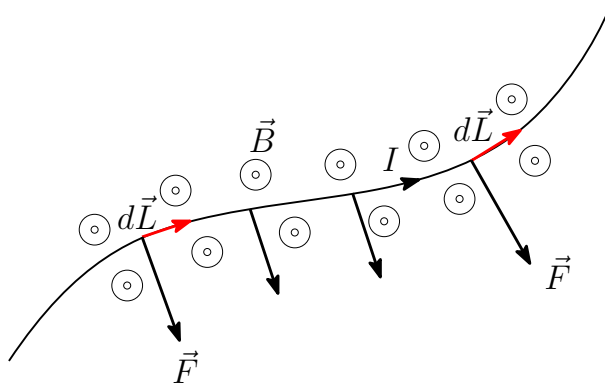


Figura 6.5. Conductor curvo en campo magnético

Así, para determinar la fuerza neta sobre el alambre curvo es necesario sumar la fuerza sobre cada segmento $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Es decir:

$$\begin{aligned} \int_0^F d\vec{F} &= \int_0^L I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F} &= I \int_0^L d\vec{l} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Por lo tanto, con la ecuación (6.9) se puede calcular la fuerza sobre un alambre recto y con la ecuación (6.9) se puede determinar la fuerza sobre un alambre curvo.

6.4. Momento de torsión magnético

Muchas de las aplicaciones del electromagnetismo se basan en la posibilidad de crear un movimiento periódico, por lo general rotacional, a partir del torque que experimenta un conductor debido a la corriente que transita por él. Pero, ¿cómo se

genera este torque? Para entender esto, considere un segmento de alambre rectangular o espira cuadrada¹, de lados a y b , como muestra la figura (6.6). Este transporta una corriente I en sentido horario, encierra un área $A = ab$ cuyo vector normal (perpendicular) es \hat{n} y está dentro de un campo uniforme \vec{B} .

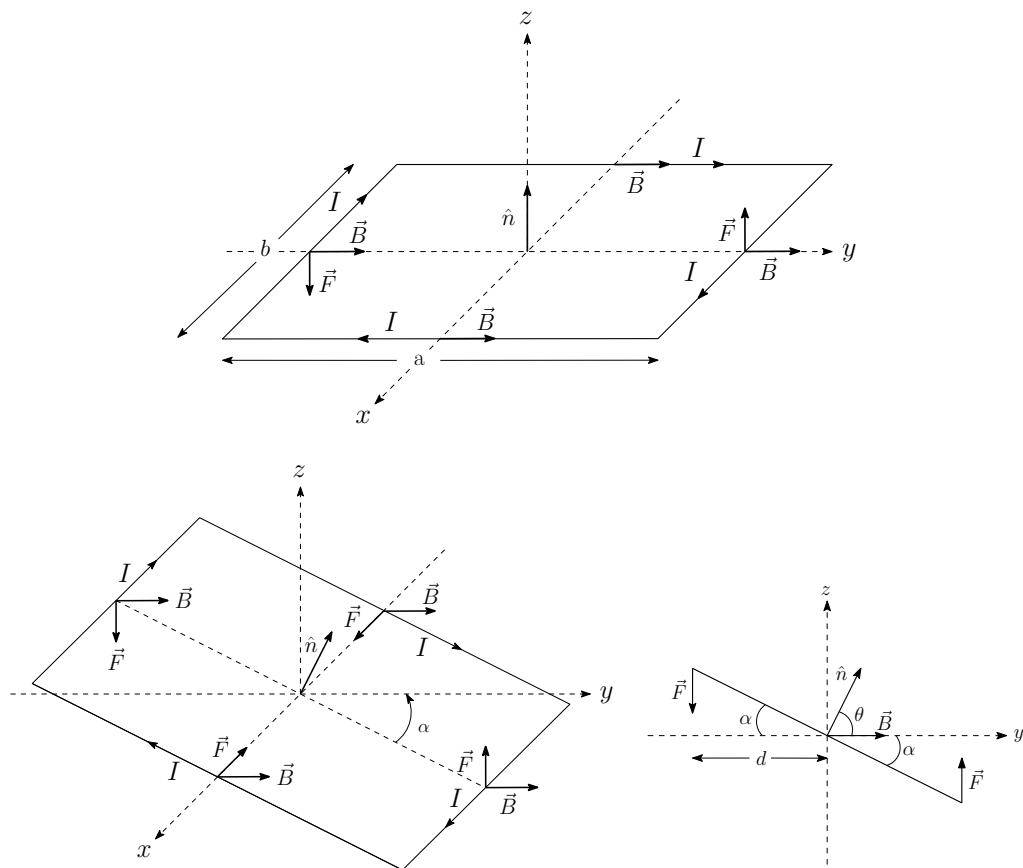


Figura 6.6. Espira rectangular. A la izquierda \hat{n} perpendicular a \vec{B} . En el centro \hat{n} y \vec{B} forman un ángulo θ . A la derecha proyección de la espira sobre el plano yz para identificar cuál es la distancia d

Considere primero la imagen de la izquierda; en esta el campo magnético es perpendicular a la corriente en los segmentos de longitud b y paralelo a los de longitud a . Así, la magnitud de la fuerza sobre los primeros es $F = IbB$, mientras que en los segundos es cero. Como se puede ver, estas fuerzas van en direcciones opuestas pero se aplican a una distancia $a/2$ del eje x . De esta manera, se produce un torque neto:

¹Todo segmento de alambre que se dobla de tal manera que se cierra, se conoce como espira.

$$\tau = 2F\frac{a}{2} = 2IbB\frac{a}{2} = IBab$$

Ahora, considere un caso más general en el que la espira esta inclinada un ángulo α , como se muestra en la figura (6.6, centro). En este caso, aunque las fuerzas sobre los segmentos de longitud a no son cero, se cancelan pues están dirigidas sobre la misma línea de acción. Por otro lado, si bien las fuerzas sobre los segmentos de longitud b siguen siendo $F = IbB$, el torque depende de la distancia perpendicular a la fuerza (d). De acuerdo con la figura (6.6, derecha), esta distancia d es igual a $\frac{a}{2} \cos \alpha$, de tal manera que el torque neto es:

$$\tau = 2Fd = 2IbB \cos \alpha \frac{a}{2} = IBab \cos \alpha$$

Ahora bien, como θ es el ángulo entre \hat{n} y \vec{B} y $\alpha + \theta = 90^\circ$,

$$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \theta) = \cos 90^\circ \cos \theta + \sin 90^\circ \sin \theta = \sin \theta$$

Así, este momento de torsión se puede expresar como:

$$\tau = IBab \sin \theta \quad (6.10)$$

Como el área de la espira es $A = ab$ y definiendo el momento dipolar magnético como $\vec{\mu} = IA\hat{n}$, la ecuación anterior se puede escribir vectorialmente como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (6.11)$$

Observe que si el vector normal a la superficie y el campo magnético son paralelos, no habrá torque neto, mientras que este será máximo cuando sean perpendiculares.

En esta sección se trató de explicar lo más claro posible cuál es la definición de torque magnético. Aun así se recomienda al lector consultar bibliografía adicional, proporcionada al final de este documento.

6.4.1. Estrategia de solución de ejercicios y problemas

1. Lea comprensivamente el enunciado y plantee lo qué le están preguntando.
2. Si es posible realice un esquema del sistema.
3. Identifique las variables o parámetros tanto conocidas como desconocidas del ejercicio.
4. Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades.

5. Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.
6. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.
7. Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado.

Ejemplo 1. Una partícula alfa está compuesta por dos neutrones y dos protones y tiene una carga neta $Q = 2q_p$. Si esta partícula entra con una velocidad $\vec{v} = (3,6 \times 10^5 \text{ m/s})\hat{i} + (1,2 \times 10^5 \text{ m/s})\hat{j}$ en un campo magnético uniforme $\vec{B} = (2,1 \times 10^3 \text{ G})\hat{j} + (4,3 \times 10^3 \text{ G})\hat{k}$:

- a. Determine la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre la partícula alfa por el campo magnético.
- b. ¿Cuál es la aceleración que experimenta? Nota: $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$.

Solución

- 1 Lea comprensivamente el enunciado y plantee lo que le están preguntando.
- 2 La figura inferior muestra un esquema del problema.

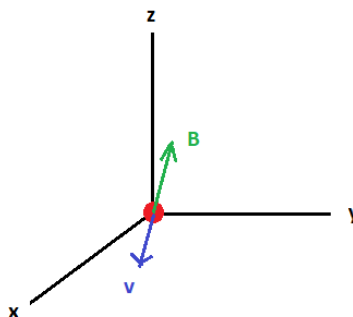


Figura 6.7. Esquema ejemplo 1

- 3 Identifique las variables o parámetros tanto conocidas como desconocidas del ejercicio.

El enunciado dice que es una partícula alfa, así que la carga es $q_\alpha = 2 \cdot 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} = 3,204 \times 10^{-19} \text{ C}$; y como está compuesta de dos protones y dos

neutrones, los cuales tienen masas similares $m_p \sim m_N = 1,67 \times 10^{-27}$ kg, la masa de la partícula α es $m_\alpha = 6,68 \times 10^{-27}$ kg. También se conoce la magnitud de la velocidad (rapidez) y la magnitud del campo magnético.

- 4 Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades.

Se debe pasar el campo magnético que está en Gauss a Teslas y como $1 \text{ G} = 1 \times 10^{-4} \text{ T}$, el campo magnético será $\vec{B} = (2,1 \times 10^{-1} \text{ T})\hat{j} + (4,3 \times 10^{-1} \text{ T})\hat{k}$.

- 5 Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.
- 6 Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.

- a. La velocidad de la partícula α solo tiene componentes \hat{i} y \hat{j} , mientras que el campo magnético tiene componentes \hat{j} y \hat{k} . Así, al usar el sistema de ecuaciones (6.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} F_{mx} &= q(v_y B_z - \cancel{v_z B_y}) \\ F_{my} &= -q(v_x B_z - \cancel{v_z B_x}) \\ F_{mz} &= q(v_x B_y - \cancel{v_y B_x}) \end{aligned} \tag{6.12}$$

El cual se reduce a:

$$\begin{aligned} F_{mx} &= q(v_y B_z) \\ F_{my} &= -q(v_x B_z) \\ F_{mz} &= q(v_x B_y) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Al reemplazar los valores se tiene:

$$\begin{aligned}
 F_{mx} &= (3,204 \times 10^{-19} \text{ C})((1,2 \times 10^5 \text{ m/s})(0,43 \text{ T})) \\
 &= 1,65 \times 10^{-14} \text{ N} \\
 F_{my} &= -(3,204 \times 10^{-19} \text{ C})((3,6 \times 10^5 \text{ m/s})(0,43 \text{ T})) \\
 &= -4,96 \times 10^{-14} \text{ N} \\
 F_{mz} &= (3,204 \times 10^{-19} \text{ C})((3,6 \times 10^5 \text{ m/s})(0,21 \text{ T})) \\
 &= 2,42 \times 10^{-14} \text{ N}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Así, la fuerza sobre la partícula α debida al campo magnético es:

$$\vec{F} = (1,65 \hat{i} - 4,96 \hat{j} + 2,42 \hat{k}) \times 10^{-14} \text{ N}$$

cuya magnitud es:

$$\begin{aligned}
 |\vec{F}| &= \sqrt{F_{mx}^2 + F_{my}^2 + F_{mz}^2} \\
 &= \sqrt{(1,65)^2 + (-4,96)^2 + (2,42)^2} \times 10^{-14} \text{ N} \\
 &= 5,76 \times 10^{-14} \text{ N}
 \end{aligned}$$

- b. Para calcular la aceleración que experimenta la partícula α se debe recordar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ y despejar la aceleración como

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_\alpha}$$

Observe que la aceleración lleva la misma dirección de la fuerza, de tal manera que las componentes de la aceleración son

$$a_x = \frac{F_{mx}}{m_\alpha} ; a_y = \frac{F_{my}}{m_\alpha} ; a_z = \frac{F_{mz}}{m_\alpha}$$

Y como la masa de la partícula α es $m_\alpha = 6,68 \times 10^{-27} \text{ kg}$, las componentes de la aceleración son:

$$\begin{aligned}
 a_x &= 0,25 \times 10^{13} \text{ m/s}^2 \\
 a_y &= -0,74 \times 10^{13} \text{ m/s}^2 \\
 a_z &= 0,36 \times 10^{13} \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

Y la magnitud de la aceleración es:

$$\begin{aligned}
 |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\
 &= \sqrt{(0,25)^2 + (-0,74)^2 + (0,36)^2} \times 10^{13} \text{ m/s}^2 \\
 &= 0,86 \times 10^{13} \text{ m/s}^2
 \end{aligned}$$

7 Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado.

- La fuerza magnética sobre la partícula α es $\vec{F} = (1,65\hat{i} - 4,96\hat{j} + 2,42\hat{k}) \times 10^{-14} \text{ N}$, cuya magnitud es $|\vec{F}| = 5,76 \times 10^{-14} \text{ N}$
- La aceleración del partícula es $\vec{a} = (0,25\hat{i} - 0,74\hat{j} + 0,36\hat{k}) \times 10^{13} \text{ m/s}^2$ cuya magnitud es $|\vec{a}| = 0,86 \times 10^{13} \text{ m/s}^2$

Ejemplo 2. Un electrón se mueve horizontalmente con rapidez $v = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$ hacia una región del espacio donde se encuentra un campo magnético uniforme que entra al plano de la hoja y de magnitud $B = 5 \text{ mT}$. Cuando el protón entra en el campo magnético, este se moverá en una trayectoria circular.

- Determine el radio de la trayectoria circular.
- Para qué rapidez este radio sería solamente la mitad del encontrado en *a*.
- Suponiendo que en vez de un electrón es un protón el que entra en el campo magnético, determine cuál es el radio de la trayectoria.

Solución

- Lea comprensivamente el enunciado y plantee lo que le están preguntando.
- Observe que como el campo magnético está entrando al plano; el resultado del producto cruz entre la velocidad y el campo da un vector fuerza que se dirige hacia arriba. Pero, ¿por qué la curva se abre hacia abajo y no hacia arriba? Esto es debido a que la carga es negativa y por esta razón cambia la dirección de la fuerza.
- Identifique las variables o parámetros tanto conocidas como desconocidas del ejercicio.

Como el enunciado dice que es un electrón, la carga del mismo es $q_e = -1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ y la masa del electrón es $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$. También se conoce la magnitud de la velocidad (rapidez) y la magnitud del campo magnético.

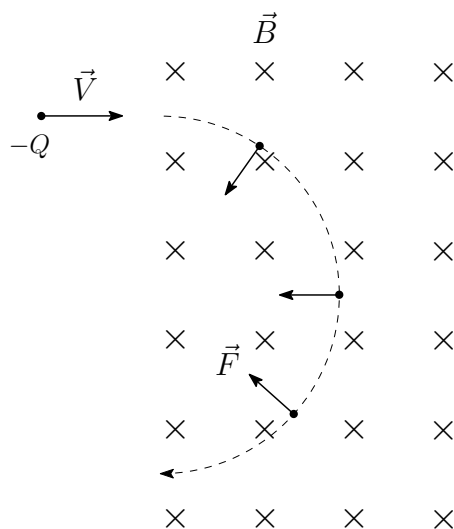


Figura 6.8. Esquema ejemplo 2

4. Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades.

La magnitud del campo magnético está en mT y es necesario pasarlo a T. Así, la magnitud del campo es $B = 5 \times 10^{-3} \text{ T}$.

5. Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.

Como se está preguntando sobre el radio de la trayectoria circular, lo más apropiado es usar la ecuación (6.6), ya que se sabe que la velocidad y el campo son perpendiculares y además se conocen todos los datos necesarios. Cabe aclarar que en el caso en el que la velocidad y el campo no son perpendiculares, no se puede usar la ecuación (6.6); por el contrario, se tendría que partir de la ecuación (6.5).

6. Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.

- a. Al aplicar la ecuación (6.6), el radio de giro ya está despejado. Por lo que solo hace falta reemplazar los valores.

$$\begin{aligned}
R &= \frac{m_e v}{|q_e| B} \\
R &= \frac{(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})(5 \times 10^5 \text{ m/s})}{|-1,602 \times 10^{-19} \text{ C}|(5 \times 10^{-3} \text{ T})} \\
R &= \frac{9,1 \cdot 5}{1,602 \cdot 5} \times 10^{-31+5+19+3} \text{ m} \\
R &= 5,68 \times 10^{-4} \text{ m}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

- b. En este punto se pregunta cuál debe ser la rapidez para que el radio se reduzca a la mitad. Para encontrar la respuesta, se puede hacer el siguiente procedimiento:

Se definen:

$$R_1 = \frac{m_e v_1}{|q_e| B}$$

$$R_2 = \frac{m_e v_2}{|q_e| B}$$

Como la condición es $R_2 = R_1/2$, se tiene que $2R_2 = R_1$, de tal manera que:

$$2 \frac{m_e v_2}{|q_e| B} = \frac{m_e v_1}{|q_e| B}$$

$$2 \frac{m_e v_2}{|q_e| B} = \frac{m_e v_1}{|q_e| B}$$

$$2v_2 = v_1$$

Así, para que el radio de giro se reduzca a la mitad, la magnitud de la velocidad de la partícula debe ser también la mitad, es decir, la rapidez debe ser $v = 2,5 \times 10^5 \text{ m/s}$.

- c. Si la partícula entrante es un protón, la dirección de rotación se invierte, y aunque la magnitud de la carga es la misma, la masa sí cambia ($m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$); por tanto, el radio de giro cambiará:

$$R = \frac{m_p v}{|q_p| B}$$

$$R = \frac{(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(5 \times 10^5 \text{ m/s})}{|1,602 \times 10^{-19} \text{ C}|(5 \times 10^{-3} \text{ T})}$$

$$R = \frac{1,67 \cdot 5}{1,602 \cdot 5} \times 10^{-27+5+19+3} \text{ m}$$

$$R = 1,04 \text{ m.}$$

7 Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado.

- El radio de giro del electrón es $R = 5,68 \times 10^{-4} \text{ m}$.
- Para que el radio de giro se reduzca a la mitad, la velocidad con la que entra la partícula debe ser la mitad de la inicial, es decir, $v = 2,5 \times 10^5 \text{ m/s}$.
- El radio de giro del protón en ese campo es $R = 1,04 \text{ m}$.

Ejemplo 3. Considere un circuito en el que se pone un segmento de alambre recto de longitud L sobre dos soportes conductores, de tal manera que el alambre cierra el circuito. Los soportes están conectados a una fuente que hace transitar una corriente I por el segmento. El sistema está dentro de un campo magnético horizontal B como muestra la figura y la densidad lineal de masa del alambre es μ .

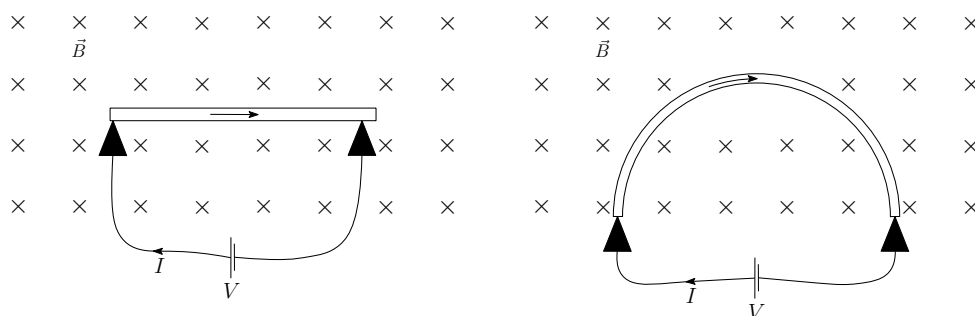


Figura 6.9. Esquema ejemplo 3. A la izquierda (a) a la derecha (b)

- Determine una expresión para la corriente que se requiere para hacer un corto circuito.
- Si el segmento de alambre recto se cambia por uno en forma de semicircunferencia de radio R que tiene la misma masa, determine una expresión para la corriente y compárela con la corriente del punto a.

Solución

- 1 En este ejemplo se producirá un corto circuito cuando el alambre se levante. El alambre se va a levantar por efecto de la fuerza magnética debida al campo magnético y a la corriente que transita por el alambre. Así, lo que se debe hacer es determinar la corriente que hace que la fuerza magnética sea mayor al peso del alambre.
- 2 Se muestra un esquema del sistema:

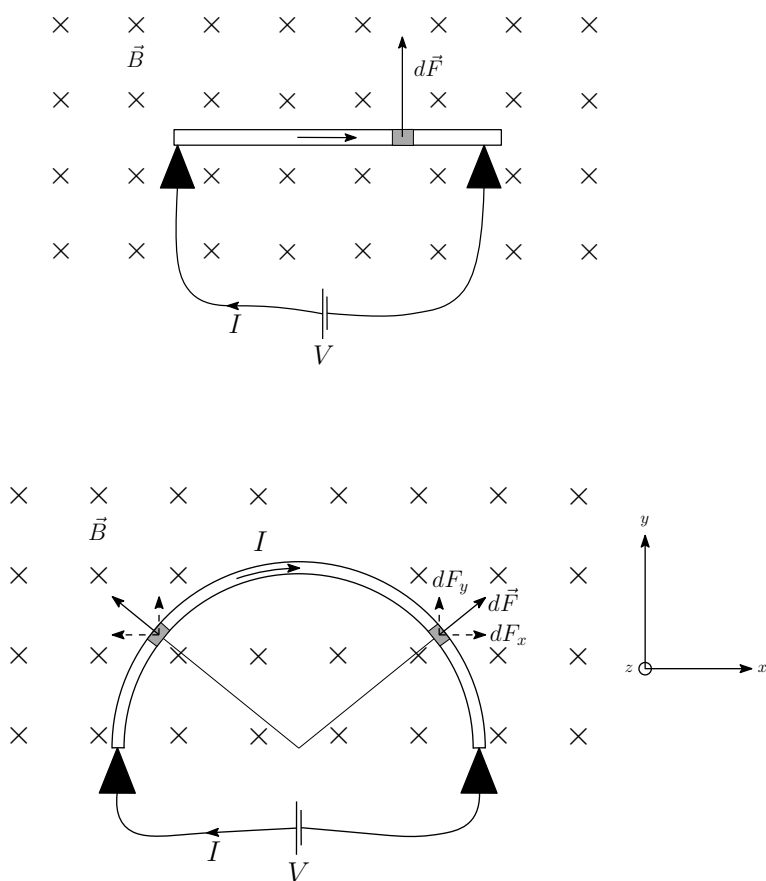


Figura 6.10. Esquema ejemplo 3. Arriba (a) y abajo (b)

- 3 Identifique las variables o parámetros tanto conocidas como desconocidas del ejercicio.

Las variables conocidas son el campo magnético \vec{B} , la densidad lineal de masa μ y la longitud del segmento L para el caso a , y $L = R\pi$ para el caso b , ya que el segmento es media circunferencia.

- 4 Verifique que todos los datos estén en el mismo sistema de unidades. Aquí no se aplica debido a que no se proporcionan datos numéricos, aunque la respuesta debe quedar en términos de B y μ , las variables conocidas.
- 5 Dependiendo del ejercicio, establezca cuáles son las ecuaciones que le pueden servir.
 - a. Como en este caso el segmento es recto, para calcular la fuerza magnética se puede usar la ecuación (6.9):

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

- b. En este caso, dado que el segmento no es recto, para calcular la fuerza magnética total sobre el segmento se debe utilizar la ecuación (6.9) e integrar:

$$\vec{F} = I \int_0^L d\vec{l} \times \vec{B}$$

- 6 Aplique los procedimientos algebraicos necesarios para encontrar la expresión algebraica de las incógnitas, es decir, despeje la(s) incógnita(s) y sustituya los valores si es el caso.
 - a. Las únicas fuerzas que actúan sobre el alambre son el peso mg y la fuerza magnética $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$, donde, usando la densidad lineal de masa μ , la masa del segmento es $m = \mu L$.
 Por otro lado, como la corriente va en dirección \hat{i} y el campo magnético va en dirección $-\hat{k}$, usando la regla de la mano derecha la fuerza magnética sobre el alambre se reduce a $\vec{F} = ILB \hat{j}$.
 Entonces, como $F_m > F_g$:

$$ILB > mg$$

$$ILB > \mu Lg$$

$$I > \frac{\mu Lg}{LB}$$

$$I > \frac{\mu g}{B}$$

- b. En este caso, las únicas fuerzas siguen siendo el peso y la fuerza magnética. Sin embargo, como el segmento es curvo, la fuerza magnética ya no es tan sencilla de calcular y si se toma un segmento de la semicircunferencia como se muestra la figura (6.10), este experimenta una fuerza dF (recuerde que la dirección de la fuerza la define el producto cruz $I d\vec{l} \times \vec{B}$) cuyas componentes son dF_x y dF_y , de tal manera que para hallar la fuerza total se debe hacer por componentes.

Ahora bien, el segmento gris de la derecha forma un ángulo θ con la horizontal y como el $d\vec{l}$ es un elemento de longitud de arco, es decir, $dl = R d\theta$. Además, $dF_x = dF \cos \theta$ y $dF_y = dF \sin \theta$.

Por lo tanto, para hallar la fuerza total en x se debe integrar el dF_x . Así:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{F_x} dF_x &= \int_0^L I d\vec{l} \times \vec{B} \cos \theta \\
 &= \int_0^L I dl B \cos \theta \\
 &= \int_0^\pi I R d\theta B \cos \theta \\
 &= I R B \int_0^\pi \cos \theta d\theta \\
 &= I R B (\sin \pi - \sin 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Observe que por la simetría se esperaba que la componente x se cancelara. Ahora, al calcular la componente y se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{F_y} dF_y &= \int_0^L I d\vec{l} \times \vec{B} \sin \theta \\
 &= \int_0^L I dl B \sin \theta \\
 &= \int_0^\pi I R d\theta B \sin \theta \\
 &= I R B \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\
 &= I R B (-\cos \pi + \cos 0) \\
 &= 2 I R B
 \end{aligned}$$

Entonces, como $F_m > F_g$:

$$2 I R B > mg$$

$$2IRB > \mu Lg$$

$$I > \frac{\mu\pi Rg}{2RB}$$

$$I > \frac{\mu\pi g}{2B}$$

Finalmente, al llamar la corriente del punto a I_a y la corriente del punto b I_b y compararlas se tiene que:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\frac{\mu\pi g}{2B}}{\frac{\mu g}{B}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_b = I_a \frac{\pi}{2}$$

7 Escriba la respuesta con sus respectivas unidades e interprete el resultado:

- La corriente I_a debe ser mayor a $\frac{\mu g}{B}$.
- La corriente que pasa por la semicircunferencia I_b debe ser mayor a $\frac{\mu\pi g}{2B}$ y al comparar las dos corrientes se tiene que

$$I_b = I_a \frac{\pi}{2}$$

6.5. Ejercicios

- Una partícula cargada se dispara hacia una región cúbica del espacio de lado L donde hay un campo magnético uniforme. Fuera de esta región no hay campo magnético. ¿Es posible que la partícula permanezca dentro de la región cúbica? ¿Por qué?
- Una partícula alfa (compuesta por dos protones y dos neutrones) parte del reposo y es acelerada por medio de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (5 \times 10^4 \text{ N/C}) \hat{i}$. Pasados $0,5 \text{ s}$ se apaga el campo eléctrico y se pone un campo magnético uniforme $\vec{B} = (0,2 \text{ T}) \hat{j}$:
 - Determine la velocidad que adquiere la partícula pasados los $0,3 \text{ s}$.
 - Si con la velocidad del literal anterior experimenta el campo magnético determine: *i)* la magnitud y dirección de la fuerza magnética sobre la partícula alfa, *ii)* el radio de giro de la partícula alfa.

- c. Demuestre que si bajo las mismas condiciones se acelera un protón en vez de una partícula alfa, el radio de giro del protón es el mismo que el de la partícula alfa aun cuando sus masas son diferentes.
3. *Movimiento helicoidal:* Este movimiento se presenta cuando una partícula cargada entra a una región del espacio que tiene un campo magnético \vec{B} con una velocidad \vec{v} , la cual tienen componentes tanto paralela (v_{\parallel}) como perpendicular (v_{\perp}) al campo magnético. Si un protón lleva una velocidad $\vec{v} = (2, -3, 0) \times 10^4$ m/s y entra en una región con campo magnético uniforme $\vec{B} = (2 \times 10^{-2} \text{ T } \hat{i})$:
- Determine el radio de giro del protón R y el plano (xy, yz o xz) en el que se da el movimiento circular.
 - Determine el periodo del movimiento circular y la distancia L sobre el eje x que se desplaza el protón durante este tiempo.
 - Demuestre que la relación entre la distancia L y el radio de giro R viene dada por $L = 2\pi R v_x / v_y$
4. Se tiene un segmento recto de alambre de cobre de 5 cm de longitud, cuyo diámetro es 2,588 mm y cuya densidad de masa $\rho_m = 8,96 \text{ g/cm}^3$. Si se pone un campo magnético de 0,065 T perpendicular al alambre:
- ¿Cuál es la corriente mínima que debe transitar por el alambre para que se levante (tenga en cuenta el peso del alambre).
 - Si la corriente máxima que soporta el alambre es de 30 A, ¿cuál es la aceleración máxima que puede tener el alambre cuando transporta esta corriente.
5. Un alambre en forma de U transporta una corriente I y está en presencia de un campo magnético \vec{B} que es perpendicular al plano del alambre. Si supone que la parte curva del alambre corresponde a media circunferencia de radio R y los lados son de longitud L , muestre que la fuerza sobre el alambre está dirigida sobre su eje y muestre que su magnitud es $|\vec{F}| = 2IRB$.
6. Muestre que la fuerza magnética neta sobre una espira cerrada de radio R que transporta una corriente I en sentido antihorario y que está en presencia de un campo magnético \vec{B} que es perpendicular al plano de la espira (entrando a la hoja) es cero.

7. Considere una espira circular de radio R que transporta una corriente I en sentido horario, tiene masa m y se encuentra sobre el plano xy . Si la espira está en presencia de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{i}$, determine la aceleración angular (α) que tiene al rotar debido al momento de torsión magnético (considere el momento de inercia de la espira como el de un anillo delgado).
8. *Motor de corriente directa:* un motor de corriente directa es un dispositivo en el que se tiene una espira cuadrada de lado L que transporta una corriente I dentro de un campo magnético \vec{B} . La espira se conecta a una fuente de voltaje V y a una resistencia R , como muestra la figura 6.11. Observe que la espira no está cerrada, de tal manera que mientras va rotando, la corriente se interrumpe cada cierto tiempo.

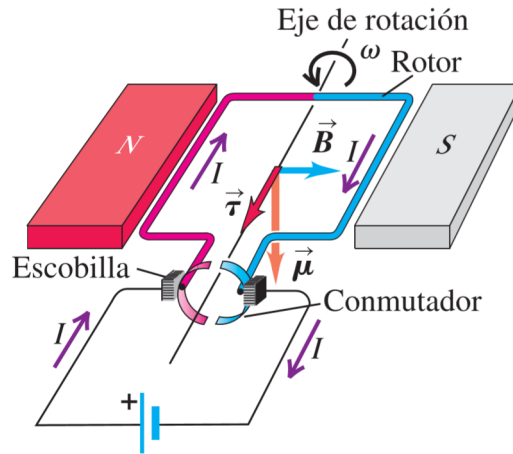


Figura 6.11. Imagen tomada de sears[poner referencia]

- a. Si la resistencia de la espira es despreciable y la espira cuadrada es de lado L , como se mencionó, compruebe que el tiempo que le toma rotar los primeros $\pi/2$ viene dado por:

$$t = \sqrt{\frac{\pi I_s R}{V L^2 B}}$$

Donde I_s es el momento de inercia de la espira. Ayuda: tenga en cuenta que este es un movimiento rotacional acelerado.

Bibliografía

Sears, Zemansky, Young, Freedman. Física Universitaria, Vol. I y II, Pearson, 1999.

Sears, Zemansky, Young, Freedman. Física Universitaria, Vol. I y II (13ava edición), Pearson, 2013.

Serway, R. A., Jewett, J. W. Física: Para ciencias e ingeniería con Física Moderna (7ma. edición). México D.F.: Cengage, 2009.

Tipler-Mosca. Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol 2A, Electricidad y Magnetismo, Reverté, 2005.

Tipler-Mosca. Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol 1C, Termodinámica, Reverté, 2005.

S. M. Lea y J. R. Burke. Física: La naturaleza de las cosas, Tomos I (Calor) y II (Electromagnetismo), International Thomson Editores, México, 1999.

Alonso M. y Finn E. J. Física. Addison-Wesley Interamericana (1995).

W. E. Gettys, F. J. Keller, M. J. Skove. Física Clásica y Moderna. McGraw-Hill (1991).



Editado por la Universidad Católica de Colombia en
junio de 2020, impreso en papel propalibros de 75 *g.*,
en tipografía Times New Roman, tamaño 11 pts.

Publicación digital
Hipertexto, Ltda.

Impreso por:
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.S.

Sapientia aedificavit sibi domum

Bogotá, D. C., Colombia.

Electricidad y magnetismo: una guía introductoria

El electromagnetismo estudia las maravillosas aplicaciones de los campos eléctricos y magnéticos en la vida cotidiana. De hecho, la mayoría de la tecnología existente, los fenómenos físicos, la producción de energía y la vida misma existen debido a la presencia de las cargas eléctricas. Este libro discute los principales conceptos asociados a estos campos, y para ello muestra las principales ecuaciones usadas para su cálculo y aplicación, al tiempo que presenta algunos ejemplos didácticos paso a paso y propone un conjunto de ejercicios de profundización. Muchos ejemplos y discusiones teóricas se complementan con ilustraciones. Está dirigido a estudiantes de pregrado asociados a carreras de ingeniería y ciencias básicas que busquen un enfoque más didáctico en el aprendizaje de herramientas físicas y matemáticas fundamentales, a fin de que puedan afrontar con efectividad un curso del ciclo básico: Electricidad y Magnetismo. Explicaciones y discusiones sobre la electrostática, la ley de Gauss, el potencial y la energía eléctrica, la naturaleza y propiedades de los condensadores, la corriente eléctrica, el estudio básico de circuitos y varias implicaciones de los fenómenos magnéticos son abordados con rigor a lo largo de esta obra.

ISBN 978-958-5133-03-7



9 789585 133037 >